2003 年東大前期理系　第 6 問

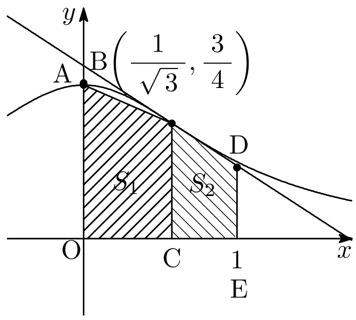
円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}$ であることについて

$x = \tan\theta$ とおくと、$dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

x	0	$\to$	1
$\tan\theta$	0	$\to$	1
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \big[\,\theta\,\big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$



$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = -2\cdot\frac{1\cdot(x^2+1)^2 - x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} = \frac{2(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)}{(x^2+1)^3}$$

$0 \leqq x \leqq 1$ では $f'(x) \leqq 0$ であるから関数は単調減少

$f''(x) = 0$ とすると $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で上に凸で，$\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq x \leqq 1$ で下に凸

変曲点は $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4}\right)$

変曲点における接線の方程式は $f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ であるから

$$y - \frac{3}{4} = -\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad \therefore\ y = -\frac{3\sqrt{3}}{8}x + \frac{9}{8}$$

$x = 1$ のときは、$y = \dfrac{9}{8} - \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

$\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4}\right)$, $\mathrm{C}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 0\right)$, $\mathrm{D}\left(1,\ \dfrac{9}{8} - \dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)$, $\mathrm{E}(1, 0)$ とおく。

$y = f(x)$　$(0 \leqq x \leqq 1)$ と x 軸で囲まれた面積を S，2 つの台形 OABC と CBDE の面積をそれぞれ S_1，S_2 とすると $S > S_1 + S_2$ が成り立つ。

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{3}{4} + \left(\frac{9}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)\right\}\cdot\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{9-4\sqrt{3}}{8}$$

$$S_1 + S_2 = \frac{27-5\sqrt{3}}{24}$$

$$\therefore\ \pi > \frac{27-5\sqrt{3}}{6} > \frac{27 - 5\times 1.74}{6} = \frac{18.3}{6} = 3.05$$

2003 年東大前期理系　第 6 問

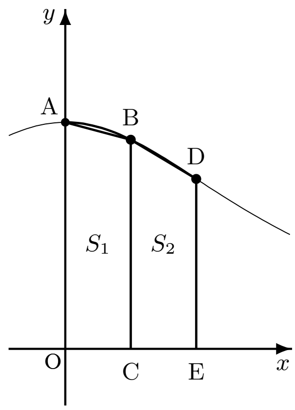
円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{6}$ であることについて

$x = \tan\theta$ とおくと、$dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

x	0	$\to$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\tan\theta$	0	$\to$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{6}$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{x^2+1} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \big[\,\theta\,\big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$$



$f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ とおくと

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = -2\cdot\frac{1\cdot(x^2+1)^2 - x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} = \frac{2(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)}{(x^2+1)^3}$$

$x \geqq 0$ で $f'(x) \leqq 0$ であるから関数は単調減少

$f''(x) = 0$ とすると $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で上に凸で，変曲点は $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{3}{4}\right)$

$\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}},\dfrac{12}{13}\right)$，$\mathrm{C}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}},\ 0\right)$，$\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{3}{4}\right)$，$\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 0\right)$

とおく。

$y = f(x)$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ と x 軸で囲まれた面積を S,

2 つの台形 OABC と CBDE の面積をそれぞれ S_1，S_2 とすると

$S > S_1 + S_2$ が成り立つ。

$$6S = 6\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$$

$$6(S_1+S_2) = 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\left\{\left(1+\frac{12}{13}\right)+\left(\frac{12}{13}+\frac{3}{4}\right)\right\}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{187\sqrt{3}}{104}$$

$$\therefore\ \pi > \frac{187\sqrt{3}}{104} > \frac{187\times 1.73}{104} = 3.11\cdots > 3.05$$

別 1

$$\therefore\ \pi > \frac{187\sqrt{3}}{104} > \frac{187\times 1.7}{104} = 3.056\cdots > 3.05$$ ☜1.7 で OK

別 2

$$6(S_1+S_2) > \frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\left(1+\frac{12}{13}\right)+\left(\frac{12}{13}+\frac{9}{13}\right)\right\} = \frac{23\sqrt{3}}{13}$$

$$\therefore\ \pi > \frac{23\sqrt{3}}{13} > \frac{23\times 1.73}{13} = 3.06\cdots > 3.05$$

2003 年東大前期理系　第 6 問

円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，点 O を中心とする半径 1 の円において，
中心角 θ の扇形 OAB を考える。
面積について

$\triangle\mathrm{OAB} <$ 扇形 OAB

$\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\theta < \dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\theta$

したがって　　$\boldsymbol{\sin\theta<\theta}$

$\dfrac{\pi}{12} > \sin\dfrac{\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\pi > 3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

$2.44<\sqrt{6}<2.45,\ 1.41<\sqrt{2}<1.42$ より

$\pi > 3(2.44-1.42) = 3\cdot 1.02 = 3.06 > 3.05$