**隣接 2 項間の漸化式**

$$\begin{cases} a_1 = 1 \ \cdots\cdots ① \\ a_{n+1} = 2\,a_n + n \ \cdots\cdots ② \end{cases}$$

[解法]

$$a_{n+1} = 2\,a_n + n \ \cdots\cdots ②$$

ひとつずらして $\quad a_{n+2} = 2\,a_{n+1} + (n+1) \ \cdots\cdots ③$

③ − ② から

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) + 1$$

ここで、 $\quad a_{n+1} - a_n = b_n$ とおくと

$$b_{n+1} = 2\,b_n + 1 \ \cdots\cdots ④$$

また、①, ② により

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 3$$

であるから $\quad b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2 \ \cdots\cdots ⑤$

④ から

$x = 2x + 1$ (特性方程式) $\rightleftharpoons$ $x = -1$ (特殊解)

となるので

$$\begin{aligned} b_{n+1} + 1 &= 2(b_n + 1) \\ \therefore\ b_n + 1 &= (b_1 + 1) \cdot 2^{n-1} \\ &= (2+1) \cdot 2^{n-1} \\ \therefore\ b_n &= 3 \cdot 2^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

よって $\quad a_{n+1} - a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1 \ \cdots\cdots ⑥$

② − ⑥ から

$$a_n = 2a_n + n - 3 \cdot 2^{n-1} + 1$$

$$\therefore\ a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - (n+1) \qquad \boxed{答}$$