隣接 3 項間の漸化式

$$\begin{cases} a_1 = 5,\ a_2 = 13 \ \cdots\cdots ① \\ a_{n+2} - 5\,a_{n+1} + 6\,a_n = 0 \ \cdots\cdots ② \end{cases}$$

[解法]

$x^2 - 5x + 6 = 0$ (特性方程式) $\rightleftharpoons$ $(x-2)(x-3) = 0 \rightleftharpoons$ $x = 2,\ 3$ (特殊解)

$2 \fallingdotseq 3$ なので ② の解は次のようにおける。

$$a_n = A \cdot 2^{n-1} + B \cdot 3^{n-1} \ \cdots\cdots ③$$

[証明]　③ を ② の左辺に代入すると

$(A \cdot 2^{n+1} + B \cdot 3^{n+1}) - 5(A \cdot 2^n + B \cdot 3^n) + 6(A \cdot 2^{n-1} + B \cdot 3^{n-1})$

$= A \cdot 2^{n-1}(2^2 - 5 \cdot 2 + 6) + B \cdot 3^{n-1}(3^2 - 5 \cdot 3 + 6) = 0$

となり成立する。(③は与えられた漸化式をみたす。)

これに、① を代入すると

$$\begin{aligned} A + B = a_1 &= 5 \\ 2A + 3B = a_2 &= 13 \end{aligned}$$

$\therefore A = 2,\ B = 3$

よって　　$a_n = 2 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-1} = 2^n + 3^n$

①, ② からは、1 通りの数列しか出てこないので、これが求める解である。