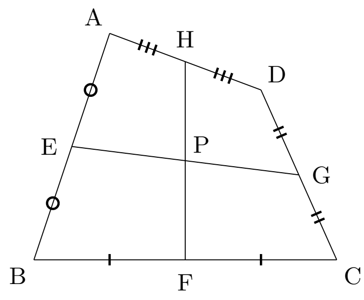
四角形の 4 つの辺の中点で分割された四角形の面積の関係

四角形 ABCD の 4 つの辺の 中点 E, F, G, H の EG, FH を結ぶと元の四角形 ABCD が新しい 4 つの四角形に分割される。
このとき,

$$\square\mathrm{AEPH}+\square\mathrm{CFPG}=\square\mathrm{BEPE}+\square\mathrm{DGPH}$$

が成り立つ。



【証明】

中点連結定理より BD // EH, BD = 2EH, BD // FG, BD = 2FG
したがって，四角形 EFGH は平行四辺形である。
$\triangle\mathrm{AEH}=\dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{ABD}$, $\triangle\mathrm{CFG}=\dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{CBD}$ より

$$\triangle\mathrm{AEH}+\triangle\mathrm{CFG}=\frac{1}{4}(\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{CBD})=\frac{1}{4}\square\mathrm{ABCD}$$

同様に

$$\triangle\mathrm{BEF}+\triangle\mathrm{DGH}=\frac{1}{4}\square\mathrm{ABCD}$$

したがって,

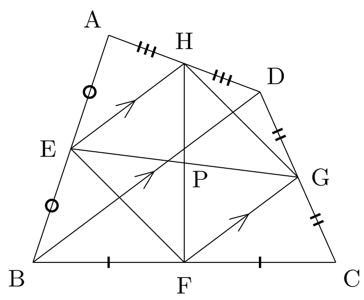
$$\triangle\mathrm{AEH}+\triangle\mathrm{CFG}=\triangle\mathrm{BEF}+\triangle\mathrm{DGH}$$

平行四辺形 EFGH の対角線は互いに他を 2 等分するから

$$\triangle\mathrm{PEF}=\triangle\mathrm{PFG}=\triangle\mathrm{PGH}=\triangle\mathrm{PHE}$$

よって

$$\square\mathrm{AEPH}+\square\mathrm{CFPG}=\square\mathrm{BEPF}+\square\mathrm{DGPH}$$



別解

点 E が線分 AB の中点であるから $\triangle\mathrm{PAE}=\triangle\mathrm{PBE}$
同様に $\triangle\mathrm{PBF}=\triangle\mathrm{PCF}$, $\triangle\mathrm{PCG}=\triangle\mathrm{PDG}$, $\triangle\mathrm{PDH}=\triangle\mathrm{PAH}$

$$\begin{aligned}\square\mathrm{AEPH}+\square\mathrm{CFPG}&=(\triangle\mathrm{PAE}+\triangle\mathrm{PAH})+(\triangle\mathrm{PCF}+\triangle\mathrm{PCG})\\&=\triangle\mathrm{PBE}+\triangle\mathrm{PDH}+\triangle\mathrm{PBF}+\triangle\mathrm{PDG}\\&=(\triangle\mathrm{PBE}+\triangle\mathrm{PBF})+(\triangle\mathrm{PDG}+\triangle\mathrm{PDH})\\&=\square\mathrm{BEPF}+\square\mathrm{DGPH}\end{aligned}$$