正弦定理の応用 (辺と角の大小関係)

$\triangle$ABC において，$A < B < C$ ならば $a < b < c$ である。
また，逆も成り立つ。
(三角形と三角関数)

【証明】
$A < B < C$ と仮定する。
(i) $A < B < C \leqq 90^\circ$ のときは,
正弦の値は角度が大きいほど大きいので $\sin A < \sin B < \sin C$
(ii) $A < B < 90^\circ < C$ のときは，$B < A + B = 180^\circ - C < 90^\circ$ であるから
$\sin A < \sin B < \sin(A + B) = \sin C$
したがって，いずれの場合でも $\sin A < \sin B < \sin C$
よって正弦定理から $a < b < c$

逆に $a < b < c$ と仮定する。
このとき正弦定理から $\sin A < \sin B < \sin C$
(i)$'$ A, B, C のいずれも 90° より大きくないときは，明らかに $A < B < C$
(ii)$'$ A, B, C のうちの 1 つ (例えばC) が 90° より大きいときは,
$C = 180^\circ - (A + B) > 90^\circ$ から $0^\circ < A + B < 90^\circ$ ゆえに $A < 90^\circ$, $B < 90^\circ$
よって $\sin A < \sin B$ から $A < B$ また，$B < 90^\circ < C$ よって $A < B < C$
したがって，いずれの場合でも $A < B < C$

正弦定理の応用 (辺と角の大小関係)

△ABC において，$A \leqq B \leqq C$ ならば $a \leqq b \leqq c$ である。
また，逆も成り立つ。
(三角形と 三角関数)

【証明】
$A \leqq B \leqq C$ と仮定する。
(i) $A \leqq B \leqq C < \dfrac{\pi}{2}$ のときは,
正弦の値は角度が大きいほど大きいので $\sin A \leqq \sin B \leqq \sin C$
(ii) $A \leqq B < C = \dfrac{\pi}{2}$ のときは，$\sin A \leqq \sin B < \sin C$
(iii) $A \leqq B < C$ で $\dfrac{\pi}{2} < C < \pi$ のときは，$A + B = \pi - C < \dfrac{\pi}{2}$ であるから
$\sin A \leqq \sin B < \sin(A+B) = \sin C$
したがって，いずれの場合でも $\sin A \leqq \sin B \leqq \sin C$
よって正弦定理から $a \leqq b \leqq c$

逆に $a \leqq b \leqq c$ と仮定する。このとき正弦定理から $\sin A \leqq \sin B \leqq \sin C$
よって
(i)$'$ $A,\ B,\ C$ のいずれも $\dfrac{\pi}{2}$ より大きくないときは，明らかに $A \leqq B \leqq C$
(ii)$'$ $A,\ B,\ C$ のうちの 1 つ (例えばC) が $\dfrac{\pi}{2}$ より大きいときは,
$C = \pi - (A+B) > \dfrac{\pi}{2}$ から $0 < A + B < \dfrac{\pi}{2}$ ゆえに $A < \dfrac{\pi}{2},\ B < \dfrac{\pi}{2}$
よって $\sin A \leqq \sin B$ から $A \leqq B$
また，$B < \dfrac{\pi}{2} < C$ よって $A \leqq B < C$
したがって，いずれの場合でも $A \leqq B \leqq C$