荷重重心とベクトル

$n\overrightarrow{\mathrm{PA}}+m\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{0}$ を満たす点 P は，線分 AB を $m:n$ の比に分ける点

$n\overrightarrow{\mathrm{PA}}+m\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{0}$，$m+n\neq 0$ のとき

$$(m+n)\cdot\frac{n\overrightarrow{\mathrm{PA}}+m\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{m+n}=\vec{0}$$

線分 AB を $m:n$ の比に分ける点を Q とすると

$(m+n)\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{0}$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{0}$

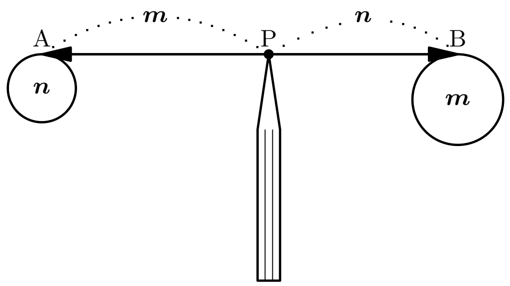
点 P は点 Q と一致する。よって，

点 P は，線分 AB を $m:n$ の比に分ける点である。

これは，始点を O に変えて

$n(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+m(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\vec{0}$ から

$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}}$ となることからも分かる。



ベクトルを物理的な力とみなせば $n\overrightarrow{\mathrm{PA}}+m\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{0}$ は，

点 P が力のモーメントの支点（$\vec{0}$）と考えられる。

AP : PB $=m:n$ であるとき，点 P で釣り合うには，点 A, B に吊す**荷重**はそれぞれ ⓝ，ⓜ である。

また，点 P にかかる荷重は $(m+n)$ である。

$l\overrightarrow{\mathrm{PA}}+m\overrightarrow{\mathrm{PB}}+n\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ を満たす点 P の位置

【例題 1】△ABC において，$4\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ を満たす点 P を求めよ。

【解】$4\overrightarrow{\mathrm{PA}}+5\cdot\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{5}=\vec{0}$

より，**線分 BC を 2 : 3 に内分する点を Q とすると，**

$4\overrightarrow{\mathrm{PA}}+5\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{0}$

ゆえに，**点 P は線分 AQ を 5 : 4 に内分する点である。**

一般化して，

$l\overrightarrow{\mathrm{PA}}+m\overrightarrow{\mathrm{PB}}+n\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ を満たす点 P は

$$l\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(n+m)\cdot\frac{m\overrightarrow{\mathrm{PB}}+n\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{n+m}=\vec{0}$$

より，線分 BC を $n:m$ に内分する点を L とすると

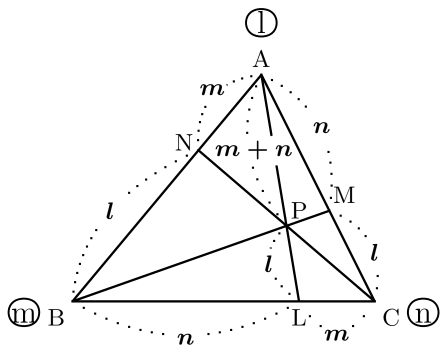
$l\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(n+m)\overrightarrow{\mathrm{PL}}=\vec{0}$

ゆえに，点 P は線分 AL を $(n+m):l$ に内分する点である。

同様に，$m\overrightarrow{\mathrm{PB}}+(n\overrightarrow{\mathrm{PC}}+l\overrightarrow{\mathrm{PA}})=\vec{0}$，$n\overrightarrow{\mathrm{PC}}+(l\overrightarrow{\mathrm{PA}}+m\overrightarrow{\mathrm{PB}})=\vec{0}$

とみれば，

線分 BC を $n:m$ に分ける点を L，線分 CA を $l:n$ に分ける点を M，線分 AB を $m:l$ に分ける点を N とするき，直線 AL, BM, CN の交点が点 P である。



点 P が 線分 AL を $m+n:l$ に分ける点であるから

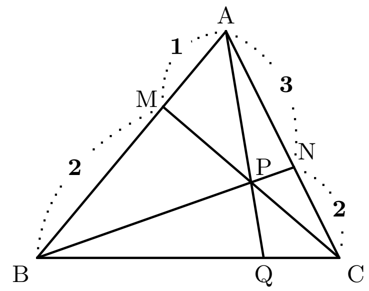
点 A を始点にとれば，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{n+m}{l+m+n}\cdot\dfrac{m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{n+m}$ と表せる。

線分 BN と 線分 CM の交点 P

【例題 2】△ABC の辺 AB を 1 : 2 に内分する点を M，辺 AC を 3 : 2 に内分する点を N，線分 BN と 線分 CM の交点を P，直線 AP と線分 BC との交点を Q とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=z\,\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

をみたす実数 x，y，z を求めよ。

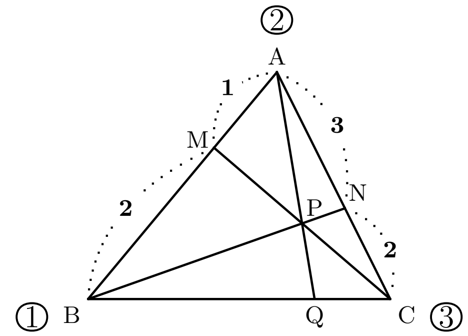


AM : MB $=1:\mathbf{2}$，AN : NC $=3:\mathbf{2}$ より

頂点 A の荷重を ② とすると，

頂点 B, C の荷重はそれぞれ ①，③ とできる。

点 P は，頂点 A, B, C にそれぞれ ②，①，③ の荷重がある場合の荷重重心である。

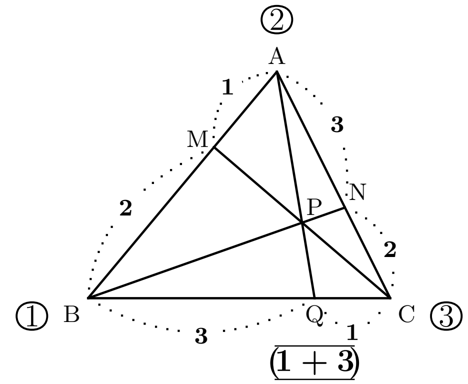


頂点 B, C のそれぞれの荷重が ①，③ より

BQ : QC $=\mathbf{3:1}$ である。

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3+1}=\boldsymbol{\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4}}$$

また，頂点 Q には $(\mathbf{1+3})$ の荷重がかかる。



頂点 A, Q のそれぞれの荷重が ②，④ より

AP : PQ $=\mathbf{4:2}$ である。

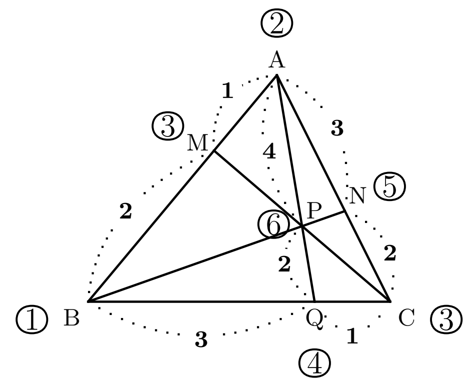
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{4}{4+2}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が一次独立であるから

$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{6}}$，$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}}$ 答

$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}}$ より $\boldsymbol{z=\dfrac{3}{2}}$ 答



頂点 P には ⑥ の荷重がかかる。

結局 AM : MB $=$ ① $:\mathbf{2}$，AN : NC $=\boxed{3}:\mathbf{2}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{①\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boxed{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\mathbf{2}+①+\boxed{3}}=\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$ となります。