同じものを含む円順列と数珠（じゅず）順列

【例題 1 】
　青玉 4 個，赤玉 2 個，黄玉 1 個を円形に並べる方法は，何通りありますか。
(ヒント) 黄玉は 1 個しかありませんから，これを中心に考えましょう。

【解答】　円形に並べる方法は，黄玉から時計回りに眺めたとき，残りの青玉 4 個，赤玉 2 個の並べ方は，同じものを含む順列ですから

$$\frac{6!}{4!2!}=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times2\times1}=\mathbf{15}\ \textbf{(通り)}\qquad\boxed{\text{答}}$$

　普通の問題の場合,【例題 1 】のように必ず 1 つしかない玉 (ここでは黄玉) があり，これを固定すれば考えやすくなります。

【例題 2 】
　穴をあけた青玉 4 個，赤玉 2 個，黄玉 1 個にひもを通して 1 つの首飾りを作る方法は，何通りありますか。
(ヒント) 黄玉は 1 個しかありませんから，これを中心に考えましょう。

【解答】　円形に並べる方法は，黄玉 1 個を固定して考えると，残りの青玉 4 個，赤玉 2 個を並べる，同じものを含む順列ですから

$$\frac{6!}{4!2!}=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times2\times1}=15\ (\text{通り})$$

　このうち，左右対称で裏返しても同じものになるものは、赤玉が対称の位置にある 3 通りあります。計算で求める方法は，円の右 (または左) 半分だけで決まるので，青玉 2 個，赤玉 1 個の順列ですから

$$\frac{3!}{2!}=3\ (\text{通り})$$

　この 3 通りを除いた 12 通りは，左右対称でない円順列であるが，首飾りを裏返したとき同じものになる組がそれぞれ 2 つずつあるので，実質の個数は 2 で割って

$$\frac{12}{2}=6\ (\text{通り})$$

に減ります。
　最後に，元々左右対称な 3 通りのものを再び加えて数え直せば

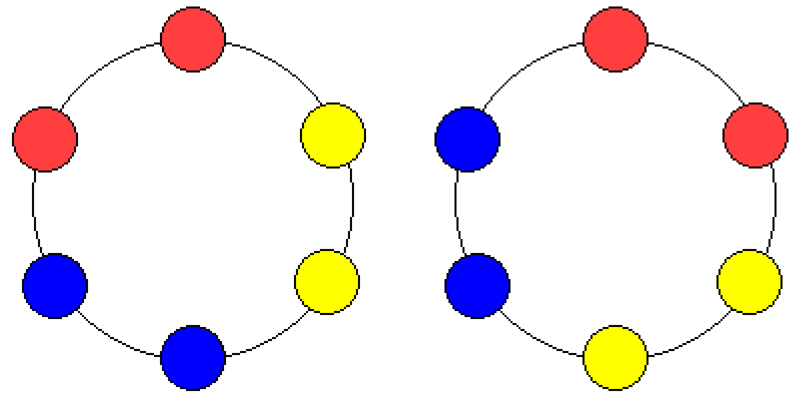
$$6+3=9\ (\text{通り})\qquad\boxed{\text{答}}$$

POINT 同じものを含む数珠順列
　同じものを含む数珠順列の総数の求めるには
　① 円順列の個数を求める。
　② ① のうち，左右対称のものの個数を求める。
　③ 左右対称でないものの個数は ① − ② で，それを **2** で割る。
　④ 求める個数は ③ + ② となる。

$$\frac{\textbf{(非対称形の個数)}}{\mathbf{2}}+\textbf{(対称形の個数)}$$

【例題 3 】
　赤玉 2 個，青玉 2 個，黄玉 2 個を円形に並べる方法は，何通りありますか。

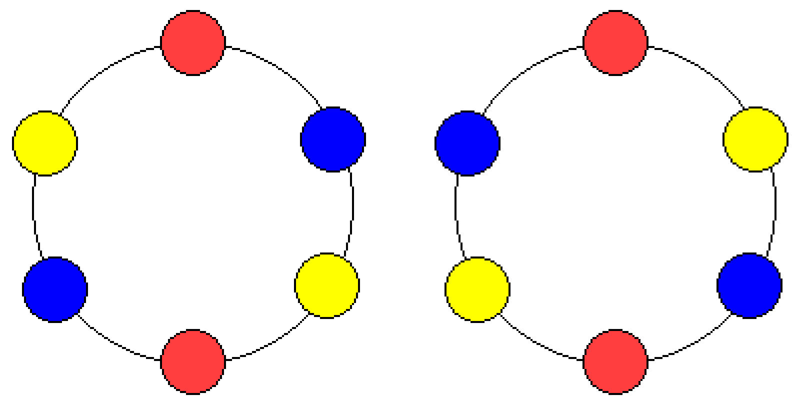
【考え方】赤球の 1 つを固定します。【例題 2】と同様に残りを勝手に並べていき，回転すると自分自身になるものと，そうでないときに分けます。



例えば、上の 2 つは回転させると同じものですから，2 で割れます。
【解答】赤の 1 つを固定して、残りの 5 つを並べると，

$$\frac{5!}{2!2!}=30\ (\text{通り})。$$

　そのうち、次の 2 つは、回転させても自分自身で，2 で割れないものです。



よって，求める個数は,

$$\frac{30-2}{2}+2=16=30\ (\text{通り})\qquad\boxed{\text{答}}$$