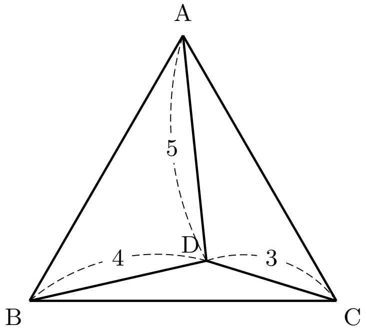
正三角形の色々な問題

【算数にチャレンジ】第 15 回問題

$\boxed{\text{問 1}}$ 右図で $\triangle$ABC は正三角形です。
　この三角形の中にある点 D と各頂点を結んだところ，
AD $= 5$, BD $= 4$, CD $= 3$ になりました。このとき、この正三角形 ABC の面積はいくらでしょうか。

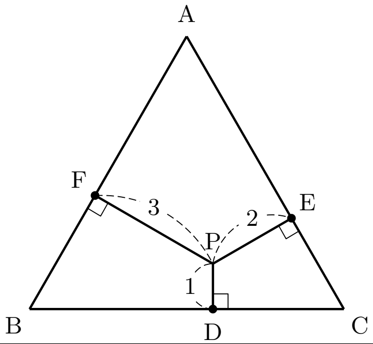
（1996 年 6 月 20 日〜 6 月 26 日）



【数学オリンピック予選 (2006) 第 2 問】

$\boxed{\text{問 2}}$ 正三角形の内部に点 P があり，P から各辺に下ろした垂線の長さはそれぞれ 1, 2, 3 であるとする。この正三角形の一辺の長さを求めよ。

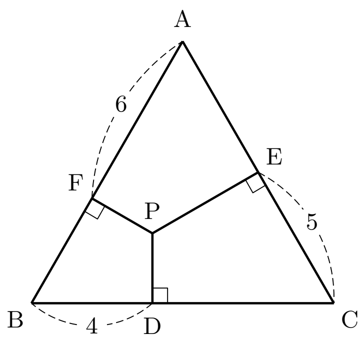
（2006 年 1 月 9 日）



【目で解く幾何 18. 面白い問題に挑戦しよう 第 2 問】

$\boxed{\text{問 3}}$ 正三角形の一辺の長さを求めよ。

（高校への数学 東京書籍 p23）

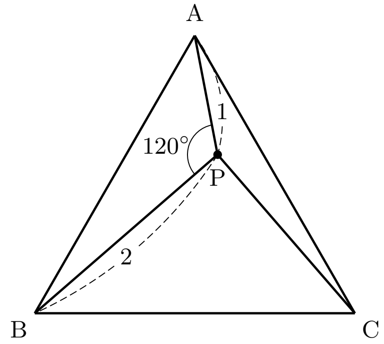


【2008 年早稲田大・商】【灘中入試 2019 年】

$\boxed{\text{問 4}}$ 正三角形 ABC の内部にある点を P とする。

(1) PA $= 1$, PB $= 2$, $\angle$APB $= 120^\circ$ のとき，
　PC の長さを求めよ。

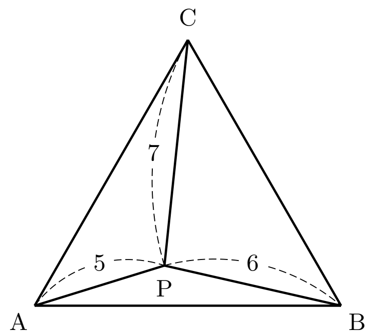
(2) $\triangle$ABC $= 1$, PB $=$ 2PA, $\angle$APB $= 120^\circ$ のとき，
　$\triangle$CAP の面積を求めよ。



【2009 年松山大】

$\boxed{\text{問 5}}$ 右図で $\triangle$ABC は正三角形です。
　この三角形の中にある点 P と各頂点を結んだところ，
AP $= 5$, BP $= 6$, CP $= 7$ になりました。このとき、この正三角形 ABC の面積はいくらでしょうか。

【類題】AP $= 5$, BP $= 7$, CP $= 8$ 名古屋 $(7, 5, 8)$ のとき正方形の一辺の長さを求めよ。



【USAMO 1974 第 5 問・改題】

$\boxed{\text{問 6}}$ $\triangle$ABC と $\triangle$PQR は，右図のような三角形で，$\triangle$ABC において，

$$\angle\text{ADB} = \angle\text{BDC} = \angle\text{CDA} = 120^\circ$$

である。
x を求めよ。

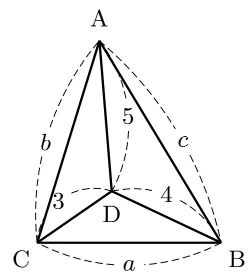


図 1

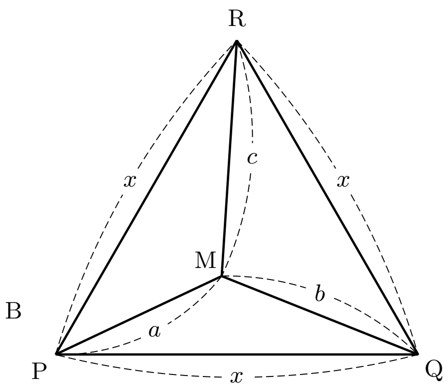


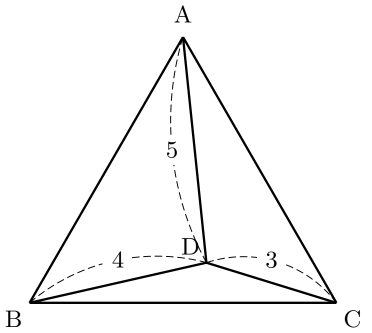
図 2

問 1

【算数にチャレンジ】第 15 回問題

右図で △ABC は正三角形です。

この三角形の中にある点 D と各頂点を結んだところ，$AD = 5,\ BD = 4,\ CD = 3$ になりました。このとき、この正三角形 ABC の面積はいくらでしょうか。



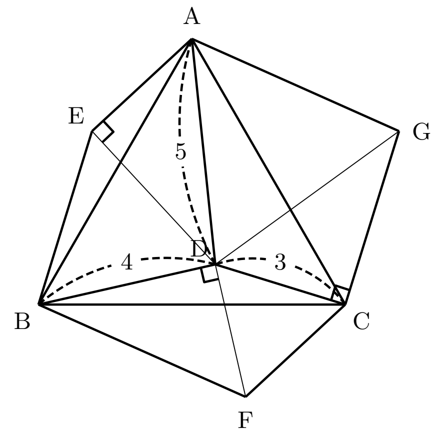
（1996 年 6 月 20 日〜 6 月 26 日）

右の図のように、正三角形 ABC の内部の三角形をそれぞれ同じ方向に 60° 回転します。

六角形 AEBFCG の面積は 3 つの正三角形の面積と,
3, 4, 5 の直角三角形 3 個の面積の和で,
正三角形 ABC の面積の 2 倍である。
六角形 AEBFCG の面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(3^2+4^2+5^2)+3\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=\frac{25\sqrt{3}}{2}+18$$

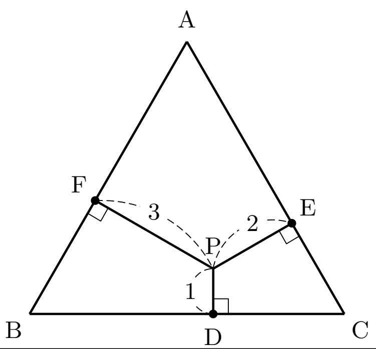
よって $\triangle ABC=\boldsymbol{\dfrac{25\sqrt{3}}{4}+9}$



問 2

【数学オリンピック予選 (2006) 第 2 問】

正三角形の内部に点 P があり，P から各辺に下ろした垂線の長さはそれぞれ 1, 2, 3 であるとする。この正三角形の一辺の長さを求めよ。



（2006 年 1 月 9 日）

正三角形の 3 頂点を A, B, C とし，一辺の長さを a とする。

$\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle BCP+\triangle CAP=\dfrac{1}{2}\cdot(1+2+3)\cdot a=3a$

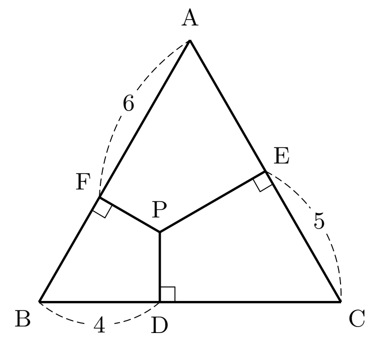
一方，$\triangle ABC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$． したがって $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=3a$. これを解いて

$\boldsymbol{a=4\sqrt{3}}$

問 3

【目で解く幾何 18. 面白い問題に挑戦しよう 第 2 問】

正三角形の一辺の長さを求めよ。



（高校への数学 東京書籍 p23）

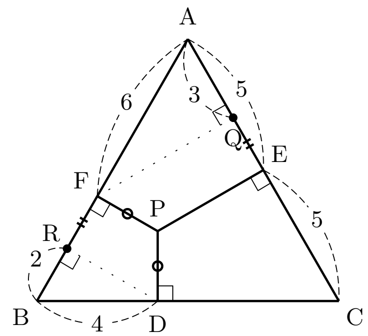
右の図のように、垂線 FQ, DR を下ろすと

$AQ+EC=3+5=8,\ AF+RB=6+2=8$ より

$EQ=FR$ である。

よって

$PF=PD$ であるから，$AE=EC=5$



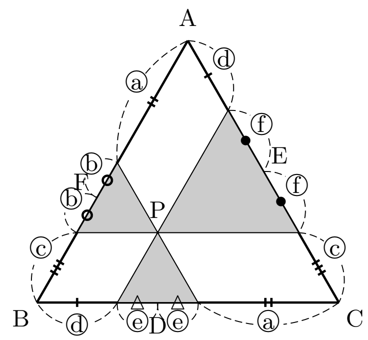
別解

・P を通り AB, BC, CA に平行な直線を引き,
小さな正三角形を 3 個つくる。
・すると図のようになり △ABC の周の長さは,

$$\begin{aligned}&2\,(ⓐ+ⓑ+ⓒ+ⓓ+ⓔ+ⓕ)\\&=2\,\{(ⓐ+ⓑ)+(ⓓ+ⓔ)+(ⓒ+ⓕ)\}\\&=2(6+4+5)=\boldsymbol{30}\end{aligned}$$

になるから，一辺の長さは,

$30\div 3=\boldsymbol{10}$



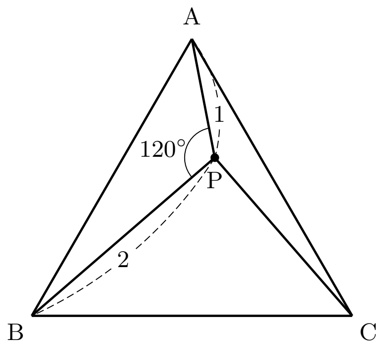
問 4

【2008 年早稲田大・商】【灘中入試 2019 年】

正三角形 ABC の内部にある点を P とする。

(3) $PA=1,\ PB=2,\ \angle APB=120^\circ$ のとき，
PC の長さを求めよ。

(4) $\triangle ABC=1,\ PB=2PA,\ \angle APB=120^\circ$ のとき，
$\triangle CAP$ の面積を求めよ。



(1) 右の図のように，$\triangle PBC$ を点 B を中心に 60° 回転します。

点 P が点 Q に移ると $\triangle PBC\equiv\triangle QBA$ である。

$\triangle PBQ$ は

$PB=QB,\ \angle PBQ=60^\circ$

であるから**正三角形**となる。

$\angle BPQ=60^\circ$ より　$\angle APQ=120^\circ-60^\circ=60^\circ$

また，$AP:PQ=1:2$ だから

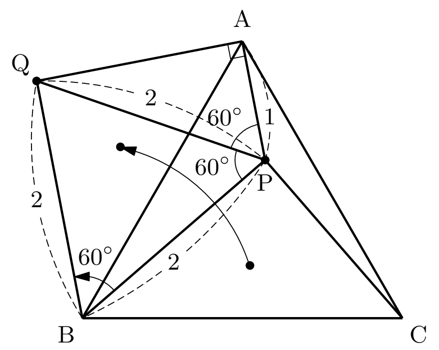
$\triangle APQ$ は $\angle PQA=30^\circ,\ \angle PAQ=90^\circ$ の**直角三角形**。

よって，$QA=\sqrt{3}$

$PC=QA=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

【補足】$\angle BPC=\angle BQA=60^\circ+30^\circ=90^\circ$ より

$\angle APC=360^\circ-(120^\circ+90^\circ)=\mathbf{150^\circ}$



別　$AB^2=2^2+1^2-2\cdot2\cdot1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=7$ より $AB=\sqrt{7}$

$\angle APC=\theta$ とすると $\cos\theta=\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot1}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より $\theta=150^\circ$

https://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q12269049077

別 1 BP 上に $BQ=1$ となる点 Q（原図の Q と同じ）をとれば

$\angle PAB+\angle PBA=60^\circ,\ \angle PBC+\angle PBA=60^\circ$ より $\angle PAB=\angle PBC$

よって，$\triangle QBC\equiv\triangle PAB$ となる。

$PQ=1,\ QC=2,\ \angle PQC=60^\circ$ より $\triangle PQC$ は

$\angle CPQ=90^\circ$ の**直角三角形**。$PC=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

別 2 AP の延長と BC との交点を D，BP の延長と CA の交点を E とします。（原図の D，E と同じ）

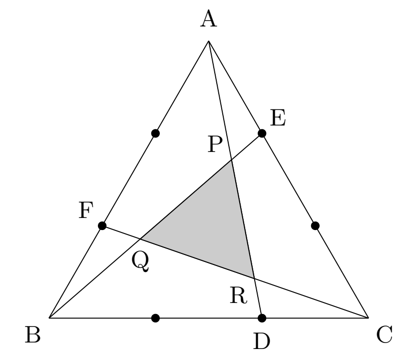
四角形 CDPE は円に内接する。よって $\angle ADC=\angle BEA$ また，$\angle ACD=\angle BAE=60^\circ$ より $\angle CAD=\angle ABE$

$AC=BA$ より $\triangle ABE\equiv\triangle ADC$ が成り立つ。

AD 上に，$QA=2,\ QC=1$ となるように点 Q が取れる。

$\triangle PQC$ は $PQ=CQ=1,\ \angle PQC=120^\circ$ の二等辺三角形ですので，$PC=\sqrt{3}$

原図 黒丸印は辺の 3 等分点



対称性から $\triangle PQR$ は正三角形である。ゆえに $\boldsymbol{\angle APB=120^\circ}$

$\triangle ABD$ と直線 FC でメネラウスの定理より

$\dfrac{3}{1}\cdot\dfrac{DR}{RA}\cdot\dfrac{2}{1}=1\ \therefore\ \dfrac{DR}{RA}=\dfrac{1}{6}$

$DR:RA=1:6\cdots\cdots$①

$\triangle ACD$ と直線 EB でメネラウスの定理より

$\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{DP}{PA}\cdot\dfrac{1}{2}=1\ \therefore\ \dfrac{DP}{PA}=\dfrac{4}{3}$

$DP:PA=4:3\cdots\cdots$②

①，② より $AP:PR:RD=3:3:1$

よって，$\mathbf{AP:BP}=AP:AR=\mathbf{1:2}$ が成り立つ。

問題の点 P は $PA=1$ のときの図である。

$PQ:QC=1:2,\ \angle PQC=60^\circ$ だから $\triangle PQC$ は

$\angle CPQ=90^\circ$ の直角三角形。ゆえに $PC=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

(2) $\angle PAB+\angle PBA=60^\circ,\ \angle PBC+\angle PBA=60^\circ$ より $\angle PAB=\angle PBC$

BP の中点を Q（原図の Q と同じ）とすると $\triangle QBC\equiv\triangle PAB$

よって $\triangle PBC=2\triangle QBC=2\triangle PAB$

同様に，AP を $2:1$ に外分する点を R（原図の R と同じ）とすると $\triangle RCA\equiv\triangle PAB$

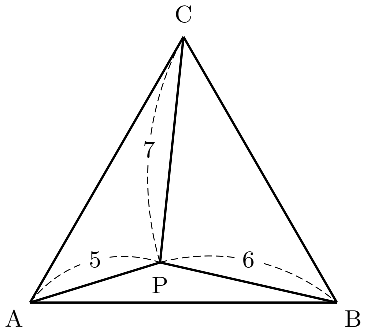
よって $\triangle PCA=\dfrac{1}{2}\triangle RCA=\dfrac{1}{2}\triangle PAB$

$\triangle PCA:\triangle PAB:\triangle PAB=1:2:4$ より $\triangle PCA=\dfrac{1}{7}\triangle ABC=\boldsymbol{\dfrac{1}{7}}$

問 5

【2009 年松山大】

右図で △ABC は正三角形です。
この三角形の中にある点 P と各頂点を結んだところ，$\mathrm{AP}=5,\ \mathrm{BP}=6,\ \mathrm{CP}=7$ になりました。このとき、この正三角形 ABC の面積はいくらでしょうか。



右の図のように、△CPB を点 C を中心として右まわりに 60° 回転した三角形を △CQA とします。

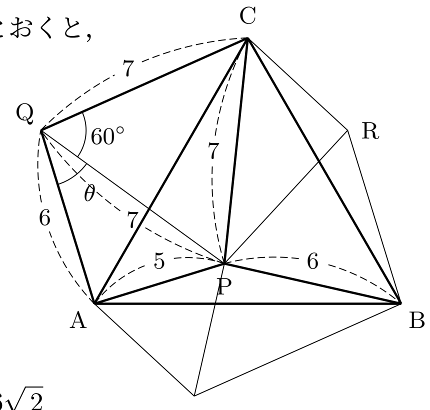
△CPQ は正三角形となるので，$\mathrm{CQ}=7$ である。$\angle\mathrm{PQA}=\theta$ とおくと，

$$\cos\theta=\frac{6^2+7^2-5^2}{2\cdot6\cdot7}=\frac{5}{7}$$

$\sin\theta>0$ より $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$

よって

$$\cos(\theta+60^\circ)=\cos\theta\cos60^\circ-\sin\theta\sin60^\circ$$
$$=\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2}-\frac{2\sqrt{6}}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5-6\sqrt{2}}{14}$$
$$\mathrm{AC}^2=6^2+7^2-2\cdot6\cdot7\cdot\frac{5-6\sqrt{2}}{14}=55+36\sqrt{2}$$
$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{AC}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(55+36\sqrt{2})$$
$$=\boldsymbol{\frac{55}{4}\sqrt{55}+9\sqrt{6}}$$



$\boxed{\text{別}}$ △CPB を点 C を中心として右まわりに 60° 回転した三角形を △CQA とします。
同様に △APC を点 A を中心として右まわりに 60° 回転した三角形を △ARC
△BPC を点 B を中心として右まわりに 60° 回転した三角形を △BTC とすると
△CPQ, △APR, △BPT は正三角形であり，

$\triangle\mathrm{APQ}\equiv\triangle\mathrm{BPR}\equiv\triangle\mathrm{CPT}$

六角形 ATBRCQ の面積は △ABC の面積の 2 倍である。

$$s=\frac{5+6+7}{2}=9$$
$$\triangle\mathrm{APQ}=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}=6\sqrt{6}$$
$$2S=\frac{\sqrt{3}}{4}(5^2+6^2+7^2)+3\cdot6\sqrt{6}=\frac{55}{2}\sqrt{3}+18\sqrt{6}$$
$$\therefore\ S=\boldsymbol{\frac{55}{4}\sqrt{55}+9\sqrt{6}}$$

問 6

【USAMO 1974 第 5 問・改題】

△ABC と △PQR は，右図のような三角形で，△ABC において，

$\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{BDC}=\angle\mathrm{CDA}=120^\circ$

である。
x を求めよ。

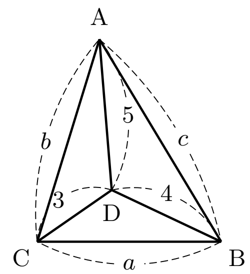


図 1

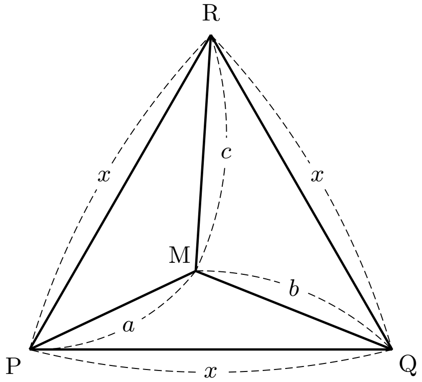


図 2

△BCD を B を中心にして図 3 のように 60° 回転したものを △BFE とする。
△BDE, △BCF は正三角形であるので，$\mathrm{BE}=4,\ \mathrm{BF}=a$
$\angle\mathrm{ADE}=120^\circ+60^\circ=180^\circ,\ \angle\mathrm{DEF}=60^\circ+120^\circ=180^\circ$
$\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{DEF}$ であるから 4 点 A, D, E, F は同一直線上にあり，

$\mathrm{AF}=5+4+3=12$ である。

図のように AF を一辺とする正三角形 AFG を描く。
$\mathrm{AF}=\mathrm{FG},\ \mathrm{CF}=\mathrm{BF}$
$\angle\mathrm{CFA}=60^\circ-\angle\mathrm{AFB},\ \angle\mathrm{BFG}=60^\circ-\angle\mathrm{AFB}=\angle\mathrm{CFA}$
なので，$\triangle\mathrm{CFA}\equiv\triangle\mathrm{BFG}$ である。
これより， $\mathrm{BG}=\mathrm{AC}=b$ となり，△AFG は問題で与えられた図 2 と合同な，一辺の長さが $x=5+4+3=12$ の正三角形となる。

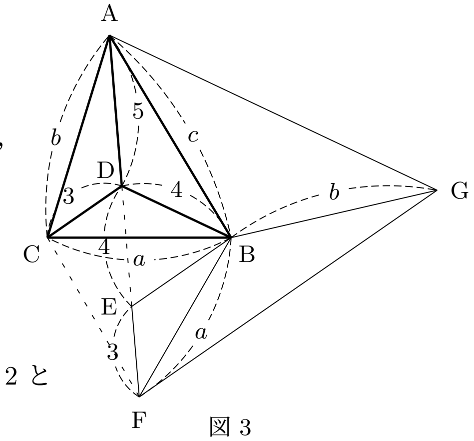


図 3