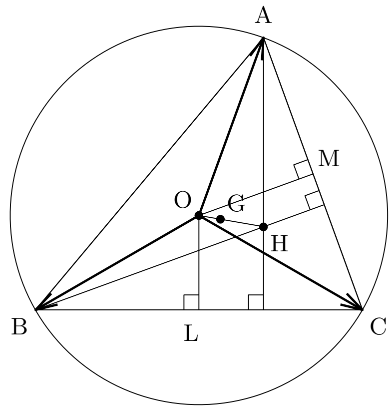
オイラー線

$\boxed{\text{問}}$ $\triangle$ABC の外心を O，垂心を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ。

$\boxed{\text{解答 1}}$



(i) $\triangle$ABC が直角三角形でないとき，
つまり，点 H が点 A, B, C と一致しないとき，
辺 BC の中点を L とすると，点 O が外心より OL $\perp$ BC
また，AH $\perp$ BC より AH $/\!/$ OL である。

$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = 2k\,\overrightarrow{\mathrm{OL}} = k\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$ と表せる。

よって，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$ ······ ①

三角形の対称性から，$k=1$ つまり

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$$

となるはずである。

点 H が $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たすとき，BH $\perp$ CA であることを示す。

$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

辺 CA の中点を M とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}$

よって，BH $/\!/$ OM が成り立つ。
OM $\perp$ CA であるから BH $\perp$ CA である。
すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表される点 H は $\triangle$ABC 垂心である。

(ii) $\triangle$ABC が直角三角形のとき，
たとえば，A $= 90^\circ$ のとき，
点 H は点 A と一致し，点 O は辺 BC の中点となるから，
$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{0}$ である。よって，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

は成り立つ。

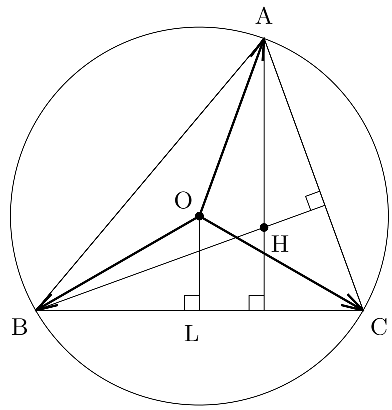
$\triangle$ABC の重心を G とすると，

$3\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が成り立つ。

オイラー線 (Euler Line)
三角形の外心，重心，垂心は一直線上に並び，
外心と重心の距離：重心と垂心の距離 ＝ 1：2 である。

解答 2

(i) $\triangle$ABC が直角三角形でないとき，



辺 BC, CA, AB の長さを $a,\ b,\ c$ で表し，外接円の半径を R とすると，

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=R$

$\triangle$OAB において余弦定理より

$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2R^2-2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=R^2-\dfrac{c^2}{2}$

同様に，　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=R^2-\dfrac{a^2}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=R^2-\dfrac{b^2}{2}$

辺 BC の中点を L とすると，点 O が外心より $\mathrm{OL}\perp\mathrm{BC}$

また，$\mathrm{AH}\perp\mathrm{BC}$ より $\mathrm{AH}\,/\!/\,\mathrm{OL}$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=2k\,\overrightarrow{\mathrm{OL}}=k\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$ と表せる。

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\ \cdots\cdots$ ①

$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(k-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\mathrm{BH}\perp\mathrm{CA}$ より

$\left\{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(k-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right\}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=0$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(k-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-(k-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+k\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-k\,|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=0$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-k\,|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+(k-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(k-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-(k-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$

$R^2-k\,R^2+(k-1)\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=0$

$-(k-1)R^2+(k-1)\left\{\left(R^2-\dfrac{b^2}{2}\right)+\left(R^2-\dfrac{c^2}{2}\right)-\left(R^2-\dfrac{a^2}{2}\right)\right\}=0$

$(k-1)\left\{\dfrac{a^2-(b^2+c^2)}{2}\right\}=0$

いま，$\triangle$ABC は直角三角形でないから，$a^2\fallingdotseq b^2+c^2$

$\therefore\ \boldsymbol{k=1}$

よって，① より

$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$

(ii) $\triangle$ABC が直角三角形のとき，

たとえば，$\mathrm{A}=90^\circ$ のとき，

点 H は点 A と一致し，点 O は辺 BC の中点となるから，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{0}$ である。よって，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

は成り立つ。