第１問　(必答問題)(配点 30)

[1]　関数 $y=2\cos 3x$ の周期のうち正で最小のものは $\boxed{\text{アイウ}}^\circ$ である。
$0^\circ \leqq x \leqq 360^\circ$ のとき、関数 $y=2\cos 3x$ において、$y=2$ となる x は $\boxed{\text{エ}}$ 個、$y=-2$ となる x は $\boxed{\text{オ}}$ 個である。

また、$y=\sin x$ と $y=2\cos 3x$ のグラフより、方程式

$$\sin x=2\cos 3x$$

は $0^\circ \leqq x \leqq 360^\circ$ のとき $\boxed{\text{カ}}$ 個の解をもつことがわかる。

[2]　実数 x に対して、$y=5\cdot 3^x+2\cdot 3^{-x}, z=5\cdot 3^x-2\cdot 3^{-x}$ とおくと

$$y^2-z^2=\boxed{\text{キク}}$$

である。

$z=0$ となるのは

$$3^x=\sqrt{\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}}$$

のときであり、y は

$$x=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\left(\log_3\boxed{\text{ス}}-\log_3\boxed{\text{セ}}\right)$$

のとき最小値 $\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}$ をとる。

第２問　(必答問題)(配点 30)

放物線 $y=-x^2+2x$ を C_1 とし、C_1 上に 点 $\mathrm{P}(a,\ -a^2+2a)$ をとる。ただし、a は $0<a<2$ を満たす定数とする。

(1)　P における C_1 の接線 ℓ_1 の方程式は

$$y=\boxed{\text{ア}}\left(\boxed{\text{イ}}-\boxed{\text{ウ}}\right)x+a^{\boxed{\text{エ}}}$$

である。原点 O における C_1 の接線を ℓ_2 とすると、ℓ_1, ℓ_2 との交点 Q の 座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\ \boxed{\text{キ}}\right)$ である。

(2)　直線 $x=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$, ℓ_2 および C_1 で囲まれた図形の面積 S_1 は

$$S_1=\frac{a^{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$$

である。

(3)　放物線 $y=px^2+qx+r$ を C_2 とする。C_2 が 3 点 O,P,Q を通るとき、
$p=\boxed{\text{サシ}}$, $q=a+\boxed{\text{ス}}$, $r=\boxed{\text{セ}}$ となる。

このとき C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S_2 は

$$S_2=\frac{a^{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

である。したがって

$$S_2=\boxed{\text{チ}}S_1$$

が成り立つ。

第３問　(選択問題)(配点 20)

a を正の実数とする。三角形 ABC の内部の点 P が

$$5\overrightarrow{\mathrm{PA}}+a\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$$

を満たしているとする。このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{a+\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{a+\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

が成り立つ。

直線 AP と辺 BC との交点 D が辺 BC を $1:8$ に内分するならば、$a=\boxed{\text{オ}}$ となり、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ となる。このとき、点 P は線分 AD を $\boxed{\text{ケ}}:\boxed{\text{コ}}$ に内分する。

さらに、$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2\sqrt{2},\ |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{10}, |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{6}$ ならば

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boxed{\text{サ}}$$

である。したがって

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=\frac{\boxed{\text{シスセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$$

第４問　(選択問題)(配点 20)

実数係数の方程式

$$x^3+ax^2+bx+c=0\cdots\cdots\cdots ①$$

が $x=2$ を解にもつとするこのとき

$$c=-\boxed{\text{ア}}\,a-\boxed{\text{イ}}\,b-\boxed{\text{ウ}}$$

であり

$$x^3+ax^2+bx+c$$
$$=(x-2)\left\{x^2+(a+\boxed{\text{エ}})\,x+\boxed{\text{オ}}\,a+b+\boxed{\text{カ}}\right\}$$

となる。

① の解を $2,\alpha,\beta$ とし、複素数平面において 3 点 $2,\alpha,\beta$ が正方形の異なる三つの頂点になっているとする。さらに、この正方形の一辺の長さが $5\sqrt{2}$ で、α,β の実部が負であるならば、α,β は

$$\boxed{\text{キク}}\pm\boxed{\text{ケ}}\,i$$

である。このとき

$$a=\boxed{\text{コ}},\ b=\boxed{\text{サシ}}, c=\boxed{\text{スセソ}}$$

となる。

第 5 問 (選択問題)(配点 20)

座標平面上に 9 個の点

$P_1(0,2)$ $P_2(1,2)$ $P_3(2,2)$
$P_4(0,1)$ $P_5(1,1)$ $P_6(2,1)$
$P_7(0,0)$ $P_8(1,0)$ $P_9(2,0)$

をとる。袋の中に $P_1, P_2, \cdots, P_9$ と書かれた 9 個の玉が入っている。

この袋から 2 個の玉を取り出すとき、取り出した 2 個の玉に書かれている 2 点に対し、その距離の 2 乗を X とする。

(1) $X = 1$ となる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(2) $X = 5$ となる確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。

(3) $X = 8$ となる確率は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}$ である。

(4) 確率変数 X は $\boxed{ク}$ 通りの値をとり、その平均 (期待値) は $\boxed{ケ}$ であり、分散は $\boxed{コ}$ である。

第 6 問 (選択問題)(配点 20)

整数 15 は次のように連続した二つ以上の正の整数の和として表すことができる。

$$15 = 1+2+3+4+5 = 4+5+6 = 7+8$$

1 より大きい整数 n について、これを連続した二つ以上の正の整数の和で表すことができるかどうかを調べるプログラムを次のように作った。

```
110 INPUT "n=";N
120 FOR J=1 TO N-1
130   W=0
140   FOR K=J TO N
150     PRINT K;
160     W=W+K
170     IF W>N THEN PRINT "No" : GOTO 200
180     IF W=N THEN PRINT "Yes" : GOTO 200
190   NEXT K
200 NEXT J
210 END
```

(1) このプログラムを実行し、n=?に対して 10 を入力すると、新たに表示される最初の 2 行は

$\boxed{ア}$ $\boxed{イ}$ $\boxed{ウ}$ $\boxed{エ}$ Yes
$\boxed{オ}$ $\boxed{カ}$ $\boxed{キ}$ $\boxed{ク}$ No

となる。

(2) n=?に対して 21 を入力すると、Yes が $\boxed{ケ}$ 回,No が $\boxed{コサ}$ 回表示される。

(3) 2 から 9 までの数を n として、に対してこのプログラムを実行する。このとき、Yes が 1 回も表示されない n を小さい順に書くと $\boxed{シ}$, $\boxed{ス}$, $\boxed{セ}$ である。