H13 センター数学 I・A 2001/01/20　NO1

第１問　(必答問題)(配点 40)

[1]　a, b を実数とし，2 次関数

$$y = 4x^2 - 8x + 5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$y = -2(x+a)^2 + b \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

の表す放物線をそれぞれ C_1, C_2 とする。

(1)　C_1 の頂点と C_2 の頂点が一致するとき，

$$a = \boxed{\text{アイ}},\ b = \boxed{\text{ウ}}$$

である。

(2)　① について，$y = 17$ となる x の値は $\boxed{\text{エオ}}$ と $\boxed{\text{カ}}$ である。② についても，$y = 17$ となる x の値が $\boxed{\text{エオ}}$ と $\boxed{\text{カ}}$ であるすると，C_2 の軸は直線 $y = \boxed{\text{キ}}$ で，頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{キ}},\ \boxed{\text{クケ}}\right)$$

である。

(3)　C_1 を x 軸方向に c, y 軸方向に $-4c$ だけ平行移動したとき，y 軸と点 $(0,\ 4)$ で交わるならば

$$c = \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である。このとき，移動した放物線を表す 2 次関数の最小値は ① の最小値より $\boxed{\text{ス}}$ だけ大きい。

[2]　赤玉 3 個，青玉 2 個，黄玉 1 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し，色を確かめてから袋に戻す。このような試行を最大で 3 回までくり返す。ただし，赤玉を取り出したときは以後の試行を行わない。

(1)　試行が 1 回または 2 回で終わる確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(2)　試行が 1 回行われるごとに 100 円受け取るとする。受け取る金額の期待値は $\boxed{\text{タチツ}}$ 円である。

(3)　青玉がちょうど 2 回取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

(4)　黄玉が少なくとも 1 回取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である。

第２問　(必答問題)(配点 40)

[1]　a を実数とし，x の整式 A, B を

$$A = x^3 + 5x^2 + a^2x + a^2 - 6a + 20$$

$$B = x^3 + (a^2+5)x + a^2 - 6a + 30$$

とする。このとき

$$A - B = 5\left(x + \boxed{\text{ア}}\right)\left(x - \boxed{\text{イ}}\right)$$

である。

(1)　$P = x + \boxed{\text{ウ}}$ とし，A が P で割り切れるとする。このとき

$$a = \boxed{\text{エ}},\ A = \left(x^2 + 4x + \boxed{\text{オカ}}\right)P$$

である。さらに

$$B = \left(x^2 - x + \boxed{\text{キ}}\right)P$$

であり，A, B はともに P で割り切れる。

(2)　$Q = x - \boxed{\text{イ}}$ とすると，A を Q で割った余り R は

$$R = \boxed{\text{ク}}(a-1)^2 + 45$$

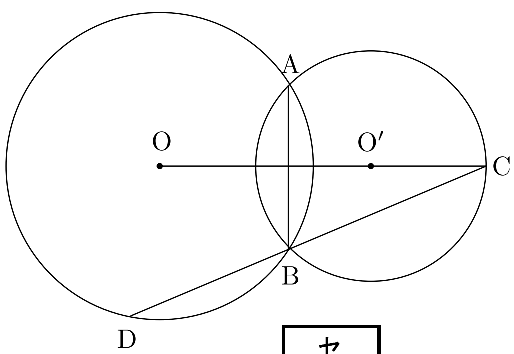
となる。よって，どんな a についても余り R は正となり，A は Q で割り切れない。

[2]　図のように交わる 2 円 O, O′ がある。この図において A, B は 2 円の交点，C は直線 OO′ と円 O′ の交点，D は直線 CB と円 O の交点である。さらに

$$\sin\angle\text{ABC} = \frac{2\sqrt{5}}{5},\ \text{AB} = 3,\ \text{BD} = \sqrt{5}$$

とする。このとき

$$\cos\angle\text{ABD} = \frac{\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}},\ \text{AD} = \boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$$



となり，円 O の半径 OA は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。また円 O′ の半径 O′A は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。さらに 2 円の中心間の距離は

$$\text{OO}' = \frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

となる。

第 3 問 **(選択問題)**(配点 20)

(1) 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} - a_n = 4\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

このとき,

$$a_3 = \boxed{\text{ア}},\ a_4 = \boxed{\text{イ}},\ a_5 = \boxed{\text{ウエ}},\ a_6 = \boxed{\text{オカ}}$$

であり，$a_{40} = \boxed{\text{キク}}$ である。また,

$$\sum_{k=1}^{40} a_k = \boxed{\text{ケコサシ}}$$

である。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の各項から定数 c を引いて得られる数列は，公比 2 の等比数列である。$b_3 = 7,\ b_4 = 11$ であるとき,

$$c = \boxed{\text{ス}},\ b_1 = \boxed{\text{セ}}$$

である。また,

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = \boxed{\text{ソタチツ}}$$

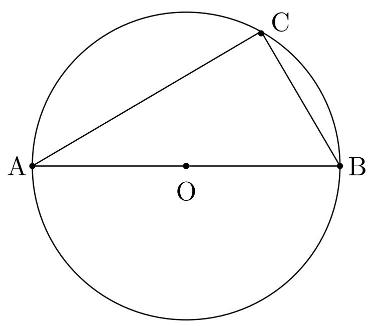
である。

第 4 問 **(選択問題)**(配点 20)

半径 1 の円 O の直径 AB によって分けられる半円周上を動く点 C がある。

△ABC の内接円の中心を D とし，線分 CD の延長と円 O の交点を E とする。

次の文章中の $\boxed{\text{アイウ}}$ と $\boxed{\text{クケコ}}$ については，当てはまる文字を A ～ E のうちから選べ。ただし，**ア**と**ウ**, **ク**と**コ**は解答の順序を問わない。



点 D の軌跡を調べよう。D は △ABC の内心であるから,

$$\angle \mathrm{ACD} = \frac{1}{2}\angle\boxed{\text{アイウ}}$$

であり，∠ABE = ∠ACE により，∠ABE = $\boxed{\text{エオ}}$° となる。よって，A, B が定点であるから，E は定点であることがわかる。次に，△EBD において,

$$\angle \mathrm{EDB} = \angle \mathrm{DCB} + \angle \mathrm{DBC},\ \angle \mathrm{EBD} = \angle \mathrm{ABE} + \angle \mathrm{DBA}$$

に注意すると,

$$\angle \mathrm{EDB} = \boxed{\text{カキ}}^\circ + \frac{1}{2}\angle\boxed{\text{クケコ}}$$

となる。したがって，△EBD は二等辺三角形で $ED = EB$ である。これにより D の軌跡は E を中心とした半径 $\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ の円弧であることがわかる。

△ABC の内接円の半径を r とし，E からこの内接円に引いた接線の接点と E との距離を ℓ とする。$\ell^2 = \boxed{\text{シ}} - r^2$ であるから，∠ABC = $\boxed{\text{スセ}}$° のとき ℓ は最小となり,

そのとき，$\ell^2 = \boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}} - \boxed{\text{チ}}$ である。

第 5 問 **(選択問題)**(配点 20)

コンピュータ は省略。