H14 センター数学I・A 2002/01/19　NO.1

第１問　(必答問題)(配点 40)

［1］ a を定数とし，2 次関数

$$y = -4x^2 + 4(a-1)x - a^2$$

のグラフを C とする。

(1) C が点 $(1,\ -4)$ を通るとき，$a = \boxed{\text{ア}}$ である。

(2) C の頂点の座標は

$$\left(\frac{a-1}{\boxed{\text{イ}}},\ \boxed{\text{ウエ}}\, a + \boxed{\text{オ}} \right)$$

である。

(3) $a > 1$ とする。x が $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲にあるとき，この 2 次関数の最大値，最小値を調べる。最大値は

$1 < a \leqq \boxed{\text{カ}}$ 　ならば　$-2a + \boxed{\text{キ}}$

$a > \boxed{\text{カ}}$ 　ならば　$-a^2 + 4a - \boxed{\text{ク}}$

である。また，最小値は

$$-a^2 - \boxed{\text{ケ}}\, a$$

である。最大値と最小値の差が 12 でになるのは

$$a = -1 + \boxed{\text{コ}} \sqrt{\boxed{\text{サ}}}$$

のときである。

［2］ 二つの箱 A, B がある。

A の箱には，次のように 6 枚のカードが入っている。
　0 の数字が書かれたカードが 1 枚
　1 の数字が書かれたカードが 2 枚
　2 の数字が書かれたカードが 3 枚
B の箱には，次のように 7 枚のカードが入っている。
　0 の数字が書かれたカードが 4 枚
　1 の数字が書かれたカードが 1 枚
　2 の数字が書かれたカードが 2 枚

A の箱から 1 枚，B の箱から 2 枚，あわせて 3 枚のカードを取り出す。

(1) 3 枚のカードに書かれた数字がすべて 0 である確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ である。

(2) 3 枚のカードに書かれた数字の積が 4 である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ である。

(3) 3 枚のカードに書かれた数字の積が 0 である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{トナ}}}$ である。

(4) 3 枚のカードに書かれた数字の積の期待値 $\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$ である。

第２問　(必答問題)(配点 40)

［1］ $a,\ b$ を実数とし，x の整式 $A,\ B$ を

$$A = x^2 + a\,x + b, \qquad B = x^2 + x + 1$$

とする。ただし，A と B は等しくないものとする。

(1) 等式

$$A^2 + B^2 = 2x^4 + 6x^3 + 3x^2 + cx + d$$

が成り立つとき，$a = \boxed{\text{ア}}$，$b = -\boxed{\text{イ}}$，$c = -\boxed{\text{ウ}}$．
$d = \boxed{\text{エ}}$ である。

(2) 等式

$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$
$$= \left\{(a-1)x + (b-1)\right\}\left\{\boxed{\text{オ}}\, x^2 + \left(a + \boxed{\text{カ}}\right) x + b + 1\right\}$$

を考える。$A - B$ が $x - 1$ で割り切れるのは $\boxed{\text{キ}}$ のときであり，また，$A + B$ が $x - 1$ で割り切れるのは $\boxed{\text{ク}}$ のときである。よって $A - B$ と $A + B$ が同時に $x - 1$ で割り切れることはない。
ただし，$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ については，次の ⓪～④ の中から当てはまるものをそれぞれ一つずつ選べ。

⓪ $a + b = 0$　　① $a - b = 0$　　② $a + b - 2 = 0$
③ $a + b + 4 = 0$　　④ $a - b - 2 = 0$

したがって，$A^2 - B^2$ が $(x-1)^2$ で割り切れるのは，$A + B$ が $(x-1)^2$ で割り切れる場合である。このとき，

$$a = -\boxed{\text{ケ}},\ b = \boxed{\text{コ}},\ A^2 - B^2 = \boxed{\text{サシス}}\, x(x-1)^2$$

となる。

［2］ 半径 R の円に内接する四角形 ABCD が

$$\mathrm{AB} = \sqrt{3} - 1,\ \mathrm{BC} = \sqrt{3} + 1,\ \cos\angle\mathrm{ABC} = -\frac{1}{4}$$

を満たしており，△ACD の面積は △ABC の面積の 3 倍であるとする。
　このとき，

$$\mathrm{AC} = \boxed{\text{セ}},\quad R = \frac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。
　また，△ACD と △ABC の面積についての条件から，

$$\mathrm{AD} \times \mathrm{CD} = \boxed{\text{テ}}$$

$$\mathrm{AD}^2 + \mathrm{CD}^2 = \boxed{\text{トナ}}$$

となる。したがって四角形 ABCD の周の長さは

$$\boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}} + 2\sqrt{3}$$

である。

第3問 (選択問題)(配点 20)

(1)　初項が 0 でない等比数列 $\{a_n\}$ が $a_1+2a_2=0$ を満たしている。

このとき，公比は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。$a_1+a_2+a_3=\dfrac{9}{4}$ ならば，

$a_4+a_5+a_6=\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ であり，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=57$

となるのは $n=\boxed{\text{ク}}$ のときである。

(2)　$b_n=pn+q$ で表される数列 $\{b_n\}$ に対して，初項から第 n 項までの和を S_n とする。$b_7=1,\ S_{12}=10$ ならば，$p=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$，

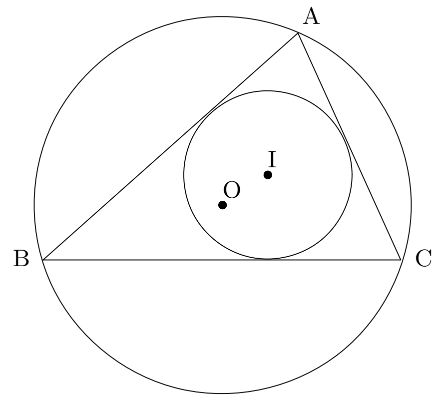
$q=\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であり，

$S_1+S_2+\cdots+S_{12}=\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

第4問 (選択問題)(配点 20)

三角形 ABC の外心を O ，内心を I，また，外接円の半径を R，内接円の半径を r とする。O と I が一致しない場合に $R,\ r$ と OI の関係を調べよう。**ア**～**サ** には A ～ G の中から C 以外の当てはまる文字を選べ。ただし **エ**と**オ** は解答の順序を問わない。

AI の延長と外接円の交点を D とし，DO の延長と外接円の交点を E とする。また直線 OI と外接円の交点を F, G とし F, O, I, G がこの順に並ぶものとする。I から AC へ垂線をひき，交点を H とする。



△AHI と △EBD は，

$\angle\mathrm{HAI}=\angle\boxed{\text{アイ}}\mathrm{I}=\angle\mathrm{BED}$

$\angle\mathrm{AHI}=\angle\mathrm{EBD}=90^\circ$

であるから相似で，ED : $\boxed{\text{ウ}}$I = $\boxed{\text{エオ}}$: HI が成り立ち，

$\boxed{\text{ウ}}\mathrm{I}\cdot\boxed{\text{エオ}}=2rR$　　　　$\cdots\cdots\cdots(1)$

次に，△DBI において

$\angle\mathrm{DIB}=\angle\mathrm{I}\boxed{\text{カキ}}+\angle\mathrm{IBA}$

$\angle\mathrm{DBI}=\angle\mathrm{DBC}+\angle\mathrm{IBC}$

$\angle\mathrm{IBA}=\angle\mathrm{IBC}$

$\angle\mathrm{I}\boxed{\text{カキ}}=\angle\mathrm{DAC}=\angle\mathrm{DBC}$

であるから，$\angle\mathrm{DIB}=\angle\boxed{\text{クケ}}\mathrm{I}$ で，△DBI は二等辺三角形となり，

$\boxed{\text{エオ}}=\mathrm{ID}$　　　　$\cdots\cdots\cdots(2)$

△IFD と △IAG において

$\angle\mathrm{IFD}=\angle\mathrm{GFD}=\angle\mathrm{IAG}$

$\angle\mathrm{FID}=\angle\mathrm{AIG}$

したがって，△IFD と △IAG は相似であり，

$$\begin{aligned}\mathrm{AI}\cdot\boxed{\text{コ}}\mathrm{I}&=\boxed{\text{サ}}\mathrm{I}\cdot\mathrm{GI}\\&=\left(\boxed{\text{サ}}\mathrm{O}+\mathrm{OI}\right)(\mathrm{GO}-\mathrm{OI})\\&=R^2-\mathrm{OI}^2\end{aligned}\qquad\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1), (2), (3) から

$\mathrm{OI}^2=R^2-\boxed{\text{シ}}$

が成り立つ。ただし，$\boxed{\text{シ}}$ には，次の ⓪～⑤ の中から正しいものを一つ選べ。

⓪ r　　① R　　② r^2
③ rR　　④ $2rR$　　⑤ $4rR$

第 5 問 **(選択問題)**(配点 20)

次のプログラムは，$x=0,\ 1,\ \cdots,\ 9$ に対する ax^2+bx+c の値の最小値と最大値を求めるものである。$\boxed{\text{アイウ}}$ ，$\boxed{\text{エオカ}}$ に適当な行番号を入れてプログラムを完成せよ。

```
100 INPUT "a=";A
110 INPUT "b=";B
120 INPUT "c=";C
130 U=C
140 V=C
150 FOR X=0 TO 9
160     Y=A*X*X+B*X+C
170     IF Y>=U THEN GOTO アイウ
180     U=Y
190     IF Y<=V THEN GOTO エオカ
200     V=Y
210 NEXT X
220 PRINT "最小値=";U
230 PRINT "最大値=";V
240 END
```

(1)　上のプログラムを実行して， a=? に対して -1 ,b=? に対して 7 , c=? に対して 28 を入力すると，180 行は $\boxed{\text{キ}}$ 回，200 行は $\boxed{\text{ク}}$ 回実行され

最小値= $\boxed{\text{ケコ}}$

最大値= $\boxed{\text{サシ}}$

が表示される。また，170 行の不等号 >= を > に，190 行の不等号 <= を < に変更したのち，同じデータを入力すると，180 行は $\boxed{\text{ス}}$ 回，200 行は $\boxed{\text{セ}}$ 回実行され

最小値= $\boxed{\text{ソタ}}$

最大値= $\boxed{\text{チツ}}$

が表示される。

(2)　冒頭のプログラムの 170 行と 180 行は，180 行 を削除して 170 行を

170 $\boxed{\text{テ}}$

と書き直しても同じ結果を得る。同様に 190 行と 200 行も，200 行を削除して，190 行を

190 $\boxed{\text{ト}}$

と書き直すことができる。ただし，$\boxed{\text{テ}}$ と $\boxed{\text{ト}}$ については，次の 0〜5 の中から最も ふさわしいものを一つずつ選べ。

0 IF Y > U THEN U = Y　　1 IF Y < U THEN U = Y
2 IF Y = U THEN U = Y　　3 IF Y > V THEN V = Y
4 IF Y < V THEN V = Y　　5 IF Y = V THEN V = Y