第１問　(必答問題)(配点 30)

[1]　a を正の定数とし，角 θ の関数

$$f(\theta) = \sin(a\,\theta) + \sqrt{3}\cos(a\,\theta)$$

を考える。

(1)　$f(\theta) = \boxed{\text{ア}}\sin\left(a\,\theta + \boxed{\text{イウ}}^\circ\right)$ である。

(2)　$f(\theta) = 0$ を満たす正の角 θ のうち最小のものは

$$\frac{\boxed{\text{エオカ}}^\circ}{a}$$

であり，小さいほうから数えて 4 番目と 5 番目のものは，それぞれ

$$\frac{\boxed{\text{キクケ}}^\circ}{a},\quad \frac{\boxed{\text{コサシ}}^\circ}{a}$$

である。

(3)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲で，$f(\theta) = 0$ を満たす θ がちょうど 4 個存在するような a の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \leqq a < \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。

[2]　対数関数

$$f(x) = \log_2 x$$

$$g(x) = \log_2(x+a)$$

について考える。関数 $y = g(x)$ のグラフは，関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{テト}}$ だけ平行移動したものである。ただし，$a > 0$ とする。

(1)　$F(x) = g(x) - f(x)$ とする。
$F(2) = 1$ となるのは，$a = \boxed{\text{ナ}}$ のときである。
$F(1) = 2F(3)$ となるのは，$a = \boxed{\text{ニ}}$ のときである。

(2)　次に

$$h(x) = \log_4(4x+b)\quad (b > 0)$$

とする。$g(1) = h(1)$，$g\left(\frac{1}{2}\right) = h\left(\frac{1}{2}\right)$ となるのは

$$a = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}},\quad b = \frac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒフ}}}$$

のときである。

第２問　(必答問題)(配点 30)

座標平面において，点 $(a,\ 1)$ を中心とし，x 軸に接する円を C_1 とする。また，放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ を C_2 とし，C_2 上に点 $\mathrm{P}\left(b,\ \frac{1}{2}b^2\right)$ をとる。ただし，$a > 0$，$b > 0$ とする。

(1)　C_1 の方程式は

$$\left(x - \boxed{\text{ア}}\right)^2 + \left(y - \boxed{\text{イ}}\right)^2 = \boxed{\text{ウ}}$$

である。

(2)　P における C_2 の接線 ℓ の傾きは $\boxed{\text{エ}}$ である。したがって，ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\text{エ}}\,x - \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}b^{\boxed{\text{キ}}}$$

である。また，P を通り，ℓ に直交する直線 m の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}x + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}b^{\boxed{\text{ス}}} + \boxed{\text{セ}}$$

である。

(3)　C_1 の中心が m 上にあるとする。このとき

$$a = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}b^{\boxed{\text{チ}}}$$

が成り立つ。

さらに，C_1 が P を通るとき

$$b = \sqrt{\boxed{\text{ツ}}},\quad a = \frac{\boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{2}$$

である。

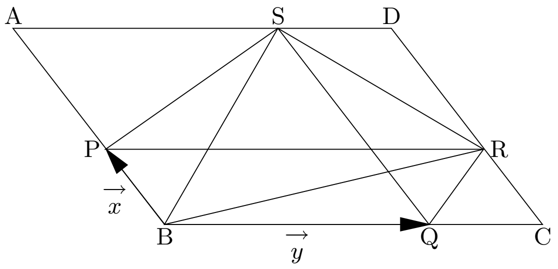
このとき，C_1 は P において ℓ に接し，ℓ と x 軸のなす角は $\boxed{\text{ナニ}}^\circ$ である。また，2 直線 $x = 0$，$x = a$ の間にあって，C_1 と C_2 と x 軸の三つで囲まれた部分の面積は

$$\frac{\boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}} - \frac{\pi}{\boxed{\text{ハ}}}$$

である。

第3問 (選択問題)(配点 20)

平行四辺形 ABCD において，辺 AB を $a:1$ に内分する点を P，辺 BC を $b:1$ に内分する点を Q とする。辺 CD 上の点 R および辺 DA 上の点 S をそれぞれ PR // BC, SQ // AB となるようにとり，$\overrightarrow{x}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}$, $\overrightarrow{y}=\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ とおく。



(1) 五角形 PBQRS の辺 RQ, SP および対角線 SB, RB が表すベクトルは $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=-\overrightarrow{x}-\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{y},\quad \overrightarrow{\mathrm{SP}}=\boxed{\text{ウエ}}\,\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{SB}}=-\left(\boxed{\text{オ}}+\boxed{\text{カ}}\right)\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RB}}=-\overrightarrow{x}-\left(\boxed{\text{キ}}+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)\overrightarrow{y}$$

となる。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{SP}}\cdot\overrightarrow{x}=\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}=\overrightarrow{y}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ が成り立つとする。このとき

$$\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}=-\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}|\overrightarrow{x}|^2=-\frac{1}{\boxed{\text{シス}}}|\overrightarrow{y}|^2$$

である。

(3) RQ // SB および SP // RB が成り立つとする。このとき

$$a=\frac{\boxed{\text{セソ}}+\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}},\quad b=\frac{\boxed{\text{ツ}}+\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。

(4) (2) と (3) の条件が同時に成り立つとき

$$\frac{|\overrightarrow{y}|}{|\overrightarrow{x}|}=\boxed{\text{ナ}}$$

であるから

$$\cos\angle\mathrm{PBQ}=\frac{\boxed{\text{ニ}}-\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

を得る。

第4問 (選択問題)(配点 20)

(1) 相異なる二つの複素数 a, b に対して

$$\arg\frac{z-a}{z-b}=\pm 90^\circ$$

を満たす z は，複素数平面上の，ある円の周上にある。この円を a, b を用いて

$$\left|z-\frac{\boxed{\text{ア}}+\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\right|=\frac{\left|\boxed{\text{エ}}-\boxed{\text{オ}}\right|}{\boxed{\text{カ}}}$$

で表される。

ただし，$\arg z$ は複素数 z の偏角を表す。

(2) 以下，複素数の偏角は 0° 以上 360° 未満とする。

2 次方程式 $x^2-2x+4=0$ の二つの解を α, β とする。ただし，α の虚部は正とする。このとき

$$\arg\alpha=\boxed{\text{キク}}^\circ,\ \arg\beta=\boxed{\text{ケコサ}}^\circ$$

$$\alpha^2+\beta^2=\boxed{\text{シス}},\ \alpha^2-\beta^2=\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}\,i$$

である。したがって

$$\arg\frac{z-\alpha^2}{z-\beta^2}=90^\circ$$

を満たす z が描く図形は

$$\left|z+\boxed{\text{タ}}\right|=\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$$

で表される円のうち

$$\boxed{\text{テトナ}}^\circ<\arg z<\boxed{\text{ニヌネ}}^\circ$$

を満たす部分である。

第５問　(選択問題)(配点 20)

右の表はあるクラスの英語と数学の成績の分布である。生徒数は 50 人で，成績は 1 から 5 までの 5 段階評価である。たとえば，この表によると英語の成績が 4，数学の成績が 2 の生徒の数は 5 人である。

X ＼ Y		数学 5	数学 4	数学 3	数学 2	数学 1
英語	5	1	3	1	0	1
英語	4	1	0	7	5	1
英語	3	2	1	0	9	3
英語	2	1	b	6	0	a
英語	1	0	0	1	1	3

このクラス全員の名札を 50 枚よくまぜて，1 枚を取り出し，その名札の生徒の英語の成績を X，数学の成績を Y として確率変数 X, Y を定める。

ただし，同姓同名の生徒はいないものとする。

(1)　$X=4$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。

$X=4$ かつ $Y=3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である。

$X \geqq 3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

$X \geqq 3$ となる条件のもとで $Y=3$ となる条件つき確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

(2)　$a+b=\boxed{\text{ス}}$ であり，$X=2$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ で X の平均（期待値）は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

(3)　Y の平均が $\dfrac{133}{50}$ であれば

$a=\boxed{\text{ト}}$，$b=\boxed{\text{ナ}}$

である。

(4)　$X=2$ という事象と $Y=4$ という事象が独立であれば

$a=\boxed{\text{ニ}}$，$b=\boxed{\text{ヌ}}$

であり，Y の平均は $\dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

第６問　(選択問題)(配点 20)

p を 3 以上の自然数とする。1 以上 $p-1$ 以下の各自然数 a に対して，数の列

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{p-1}$$

を次のように決める。

● a_1 は a とする。

● a_{i+1} は $a_i \times a$ を p で割った余りとする。ただし，$1 \leqq i \leqq p-2$ である。

また，各 a に対して $f(a)$ を次のように決める。

● $a_i=1$ となる i が $1 \leqq i \leqq p-1$ の範囲にあるときは，そのような最小の i を $f(a)$ とする。

● $a_i=1$ となる i が $1 \leqq i \leqq p-1$ の範囲に無いときには $f(a)=0$ とする。

p の値を入力して $f(1), f(2), \cdots, f(p-1)$ を出力させるプログラムを考えたい。

方針　数の列 $a_1, a_2, \cdots$ を上の規則によって決めていく過程で $\boxed{\text{ア}}$ になればその i を出力して FOR ループを抜けだす。

1 から $p-1$ のどの i に対しても $\boxed{\text{イ}}$ ならば 0 を出力する。

この方針に従って，次のプログラムを書いた。

```
100 INPUT "P=";P
110 FOR A = 1 TO P-1
120    [ ウ ]
130    FOR I = 1 TO P-1
140      IF [ エ ] THEN PRINT "f(";A;")=";I:GOTO 180
150      B = A*B-P*INT(A*B/P)
160    NEXT I
170    PRINT "f(";A;")= 0"
180 NEXT A
190 END
```

注意：INT(X) は，X を越えない最大の整数を表す関数である。

(1)　上の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{エ}}$ に適するものを，次の ①～⑦ のうちから一つずつ選べ。

① $a_i \neq 1$　② $a_i=1$　③ B = 0　④ B = 1
⑤ B <> 0　⑥ B = A　⑦ A = B

(2)　このプログラムを実行する。表示

P=?

に対して 7 を入力したとき，はじめの 4 行は

f(1) = $\boxed{\text{オ}}$
f(2) = $\boxed{\text{カ}}$
f(3) = $\boxed{\text{キ}}$
f(4) = $\boxed{\text{ク}}$

と出力される。

(3)　上のプログラムで 140 行と 150 行を入れかえたプログラムを実行させ

P=?

に対して 9 を入力すると，はじめの 4 行は

f(1) = $\boxed{\text{ケ}}$
f(2) = $\boxed{\text{コ}}$
f(3) = $\boxed{\text{サ}}$
f(4) = $\boxed{\text{シ}}$

となり，意図した結果と異なるものが出力される。