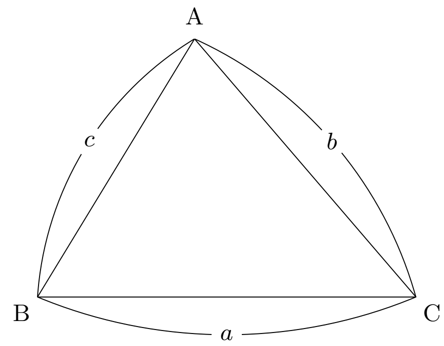
中学生版「ヘロンの公式」

$\triangle$ABC の面積 S は

BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$ とし，$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とおくと

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$



最大辺を a とする。

点 A から辺 BC に下ろした垂線の足を H とし，

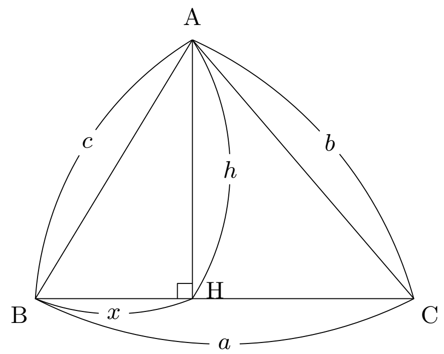
AH $= h$, BH $= x$ とすると HC $= a - x$

三平方の定理より

$$h^2 = c^2 - x^2 \ \cdots①$$

$$h^2 = b^2 - (a-x)^2$$

$$= b^2 - (a^2 - 2ax + x^2) \ \cdots②$$



①, ② より

$$c^2 = b^2 - a^2 + 2ax$$

$$x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$$

$$h^2 = (c+x)(c-x)$$

$$c + x = c + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a} = \frac{c^2 + 2ca + a^2 - b^2}{2a} = \frac{(a+c)^2 - b^2}{2a}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a-b+c)}{2a} = \frac{2s(2s-2b)}{2a} = \frac{2s(s-b)}{a}$$

$$c - x = c - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a} = \frac{b^2 - (c^2 - 2ca + a^2)}{2a} = \frac{b^2 - (a-c)^2}{2a}$$

$$= \frac{(a+b-c)(-a+b+c)}{2a} = \frac{(2s-2c)(2s-2a)}{2a} = \frac{2(s-a)(s-c)}{a}$$

$$h^2 = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$$

$$S = \frac{1}{2}ah = \sqrt{\boldsymbol{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$