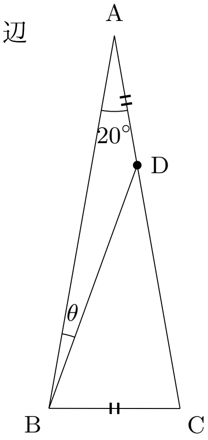
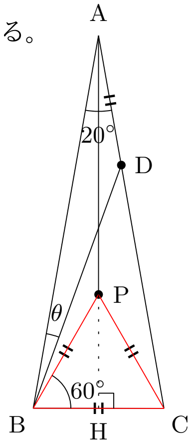
ラングレー類題 7

$\boxed{問}$ $\triangle ABC$ は $AB = AC$, $\angle BAC = 20^\circ$ の二等辺三角形である。点 D を辺 AC 上で $AD = BC$ を満たす点とするとき，$\angle ABD$ の大きさを求めよ。



$\boxed{解答\ 1}$ 図のように， BC を一辺とする正三角形をつくり，その頂点を P とする。辺 BC の中点を H とすると，直線 APH は線分 BC の垂直二等分線である。



$\triangle ABD$ と $\triangle BAP$ は

$AB = BA$(共通) $\cdots\cdots$①

$AD = BC$, $BP = BC$ から

$AD = BP$ $\cdots\cdots$②

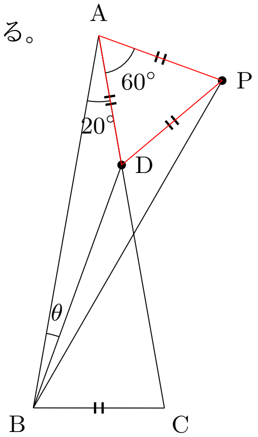
$\angle BAD = 20^\circ$, $\angle ABP = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$ から

$\angle BAD = \angle ABP$ $\cdots\cdots$③

2 辺とその間の角が相等しいので，$\triangle ABD \equiv \triangle BAP$

ゆえに，$\angle ABD = \angle BAP = \dfrac{1}{2}\angle BAC = 10^\circ$

$\boxed{解答\ 2}$ 図のように， AD を一辺とする正三角形をつくり，その頂点を P とする。



$\triangle BAP$ と $\triangle ABC$ は

$\angle BAP = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ = \angle ABC$

$BA = AB$(共通), $AP = BC$

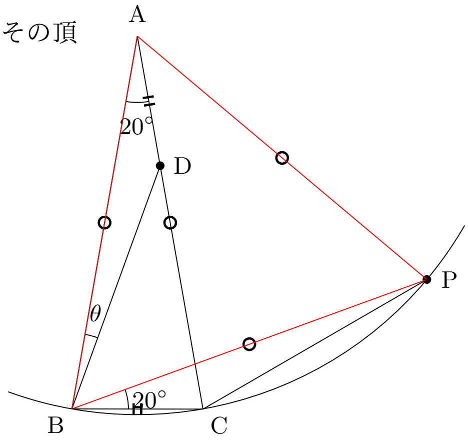
であるから $\triangle BAP \equiv \triangle ABC$

よって $\triangle BAP$ は $\angle ABP = 20^\circ$ の二等辺三角形である。

したがって $\triangle ABD$ と $\triangle PBD$ は三辺相等で合同である。

ゆえに，$\angle ABD = \dfrac{1}{2}\angle ABP = 10^\circ$

$\boxed{\text{解答 3}}$ 図のように， AB を一辺とする正三角形をつくり，その頂点を P とする。



$\triangle$PBC と $\triangle$BAD は

$\angle\mathrm{PBC} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ = \angle\mathrm{BAD}$

$\mathrm{PB} = \mathrm{BA},\ \mathrm{BC} = \mathrm{AD}$

であるから $\triangle\mathrm{BAP} \equiv \triangle\mathrm{BAD}$

よって $\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{PBC}$ である。

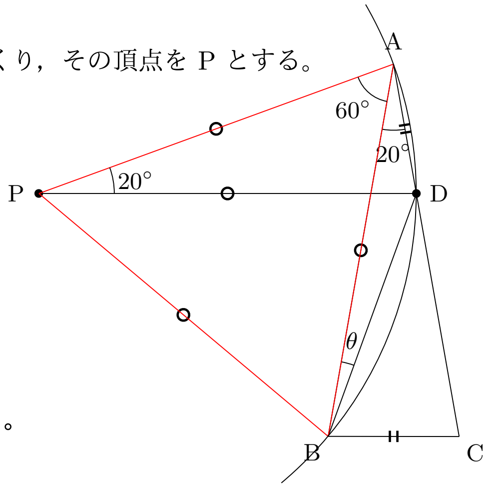
$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = \mathrm{AP}$ であるから，

3 点 B, C, P は 点 A を中心とする同一円周上にある。

よって，$\angle\mathrm{BPC} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BAC} = 10^\circ$

ゆえに，$\angle\mathrm{ABD} = 10^\circ$

$\boxed{\text{解答 4}}$ 図のように， AB を一辺とする正三角形をつくり，その頂点を P とする。



$\triangle$PAD と $\triangle$ABC は

$\angle\mathrm{PAD} = 60^\circ + 20^\circ = 80^\circ = \angle\mathrm{ABC}$

$\mathrm{PA} = \mathrm{AB},\ \mathrm{AD} = \mathrm{BC}$

であるから $\triangle\mathrm{PAD} \equiv \triangle\mathrm{ABC}$

よって $\triangle$PAD は

$\angle\mathrm{APD} = 20^\circ,\ \mathrm{PA} = \mathrm{PD}$

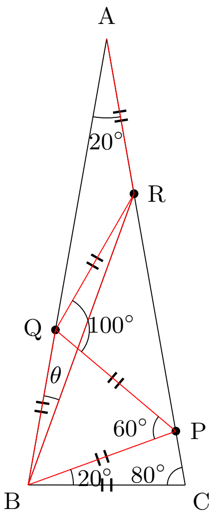
の二等辺三角形である。

$\mathrm{PA} = \mathrm{PD} = \mathrm{PB}$ であるから，

3 点 A, D, B は 点 P を中心とする同一円周上にある。

よって，$\angle\mathrm{ABD} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{APD} = 10^\circ$

$\boxed{\text{解答 5}}$ 図は，頂角が 20° の 2 等辺三角形を 4 個の二等辺三角形に分割する方法です。この方法は 11 世紀のアラブの学者によって発見された。



（モノグラフ 26 幾何学より）

辺 AC 上に 点 P, R を 辺 AB 上に点 Q を次のようにとる。

$\angle\mathrm{CBP} = 20^\circ, \angle\mathrm{BPQ} = 60^\circ, \angle\mathrm{PQR} = 100^\circ$

$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ACB} = 80^\circ$ であるから　$\angle\mathrm{BPC} = 80^\circ, \angle\mathrm{QBP} = 60^\circ$

したがって，$\triangle$BQP は正三角形である。

$\angle\mathrm{QPC} = 60^\circ + 80^\circ = 140^\circ$ であるから，$\angle\mathrm{QPR} = 40^\circ$

$\therefore\ \angle\mathrm{QRP} = 180^\circ - (100^\circ + 40^\circ) = 40^\circ$

したがって，$\triangle$PQR は $\mathrm{QR} = \mathrm{QP}$ の二等辺三角形である。

また，$\angle\mathrm{AQR} = \angle\mathrm{QRP} - \angle\mathrm{QAR} = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ$

すなわち，$\triangle$ARQ も $\mathrm{RA} = \mathrm{RQ}$ の二等辺三角形である。

したがって，$\mathrm{AR} = \mathrm{RQ} = \mathrm{QP} = \mathrm{BP} = \mathrm{BC}$ より，**点 R は問題の点 D である。**

$\angle\mathrm{AQR} = 20^\circ,\ \mathrm{QR} = \mathrm{QB}$ から　$\angle\mathrm{ABR} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{AQR} = 10^\circ$ である。

ラングレー類題７の解答

$\boxed{\text{解答 6}}$

図 1 は正 9 角形である。$\mathrm{A_1A_6}$ と $\mathrm{A_4A_9}$ の交点を P とする。

$\angle\mathrm{PA_1A_9} = \angle\mathrm{PA_9A_1} = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$ より

$\triangle\mathrm{PA_1A_9}$ は正三角形である。

ゆえに，$\mathrm{PA_1} = \mathrm{A_1A_9} = \mathrm{A_5A_6}$ $\cdots$①

また，$\mathrm{A_5H_5}$ を 二等辺三角形 $\triangle\mathrm{A_1A_5A_9}$ の中線とすると

点 P はこの中線上にある。

よって，$\angle\mathrm{A_1A_5P} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{A_1A_5A_9} = 10^\circ$ $\cdots$②

①から 点 P は条件を満たす点であり，② から求める角は 10° である。

図 1