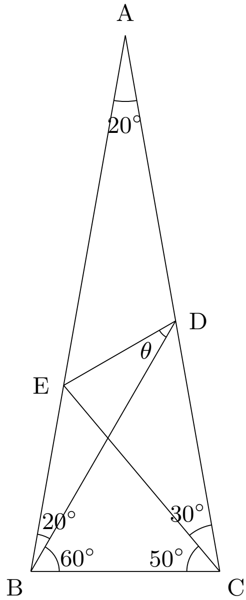
ラングレーの問題 (フランクリンの凧)

$\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形です。図の $\angle BDE$ の大きさを求めよ。



1922 年 ラングレーによって提出され，日本では佐藤大八郎氏が「数学セミナー 1967 年 6 月号」ではじめて紹介した。

【模範解答】

線分 CD 上に $\angle PBC = 20^\circ$ となるように点 P をとると，

$\angle BCP = \angle BPC = 80^\circ$ より $BC = BP$

また，$\angle BCE = \angle BEC = 50^\circ$ より $BC = BE$

よって，$BE = BP$ となり，$\angle EBP = 60^\circ$ より

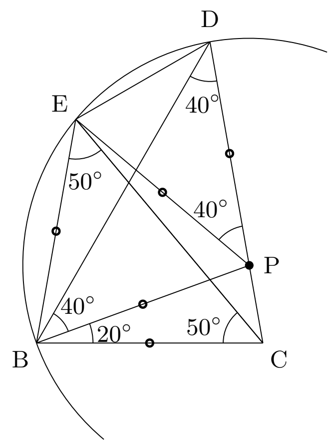
$\triangle EBP$ は正三角形である。

さらに，$\angle DBP = \angle BDP = 40^\circ$ なので，$DP = BP = EP$

したがって，3 点 E, B, D は点 E を中心とする同一円周上にあり，

円周角の定理により

$$\angle BDE = \frac{1}{2}\angle BPE = \frac{1}{2} \times 60^\circ = \mathbf{30^\circ}$$



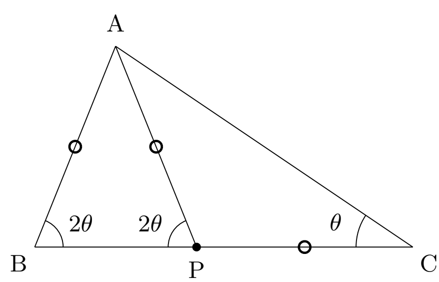
補助線を引くことで，いくつかの**二等辺三角形と正三角形**が出現します。

【予備知識】一般に，$\triangle ABC$ で

$\mathbf{\angle ABC = 2\angle ACB}$ の関係が成り立つとき，

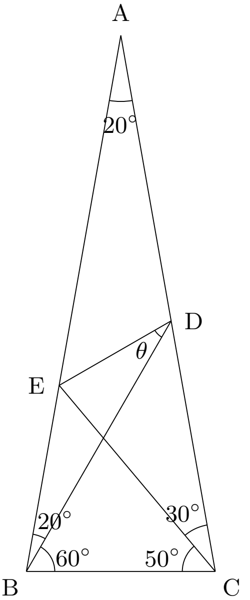
線分 BC 上に $\mathbf{\angle ABP = \angle APB}$ となるように点 P をとると，

$\mathbf{AB = AP = CP}$ となる。



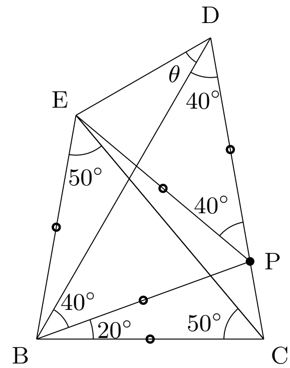
ラングレーの問題 (フランクリンの凧)

$\triangle$ABC は AB $=$ AC の二等辺三角形です。図の $\angle$BDE の大きさを求めよ。



1922 年 ラングレーによって提出され，日本では佐藤大八郎氏が「数学セミナー 1967 年 6 月号」ではじめて紹介した。

【解答 2】



線分 CD 上に $\angle\mathrm{PBC} = 20^\circ$ となるように点 P をとると，
$\angle\mathrm{BCP} = \angle\mathrm{BPC} = 80^\circ$ より BC $=$ BP
また，$\angle\mathrm{BCE} = \angle\mathrm{BEC} = 50^\circ$ より BC $=$ BE
よって，BE $=$ BP となり，$\angle\mathrm{EBP} = 60^\circ$ より
$\triangle$EBP は正三角形である。
したがって PB $=$ PE $\cdots\cdots$①
$\angle\mathrm{PBD} = \angle\mathrm{PDB} = 40^\circ$ より PB $=$ PD $\cdots\cdots$②
①, ② より PE $=$ PD
$\angle\mathrm{PDE} = \dfrac{1}{2}\left(180^\circ - 40^\circ\right) = 70^\circ$
$\theta = 70^\circ - 40^\circ = \mathbf{30^\circ}$

補助線を引くことで，いくつかの**二等辺三角形と正三角形**が出現します。

【予備知識】一般に，$\triangle$ABC で
　$\boldsymbol{\angle\mathrm{ABC} = 2\angle\mathrm{ACB}}$ の関係が成り立つとき，
線分 BC 上に $\boldsymbol{\angle\mathrm{ABP} = \angle\mathrm{APB}}$ となるように点 P をとると，
　$\boldsymbol{\mathrm{AB} = \mathrm{AP} = \mathrm{CP}}$ となる。