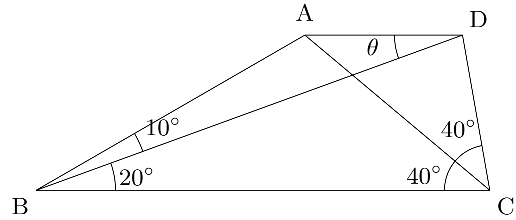
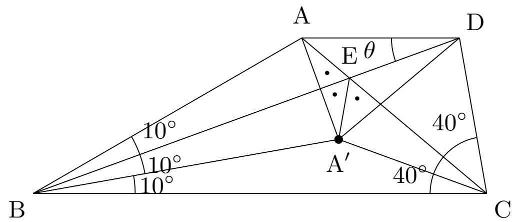
【整角四角形 $Q(10,\ 20,\ 40,\ 40)$】

図の θ の角度を求めよ。
(折り返しでひらめく補助線の幾何より)



【解答】



対角線の交点を E とする。
$\angle \mathrm{BCD} = \angle \mathrm{BDC} = 80^\circ$ より $\triangle \mathrm{BCD}$ は $\mathrm{BC} = \mathrm{BD}$ の二等辺三角形である。

図のように，BD に関して $\triangle \mathrm{ABD}$ を対称移動すると，

$\triangle \mathrm{DBA'} \equiv \triangle \mathrm{DBA}$ $\cdots\cdots$①

$\triangle \mathrm{DBA'}$ と $\triangle \mathrm{CBA'}$ は

$\mathrm{BD} = \mathrm{BC},\ \mathrm{BA'} = \mathrm{BA'}$(共通)

$\angle \mathrm{DBA'} = \angle \mathrm{CBA'} = 10^\circ$

だから $\triangle \mathrm{DBA'} \equiv \triangle \mathrm{CBA'}$ $\cdots\cdots$②

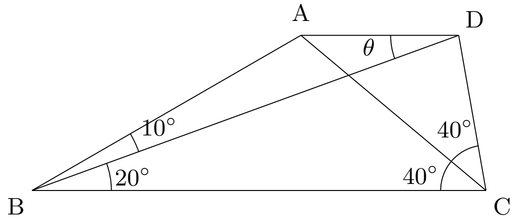
①, ② より $\triangle \mathrm{DBA} \equiv \triangle \mathrm{CBA'}$

$\angle \mathrm{EBA'} = \angle \mathrm{CBA'} = 10^\circ,\ \angle \mathrm{BEA'} = \angle \mathrm{CEA'} = 60^\circ$ であるから，点 $\mathrm{A'}$ は $\triangle \mathrm{EBC}$ の内心である。

$$\theta = \angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{A'CD} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{ACB} = \frac{1}{2} \times 40^\circ = \mathbf{20^\circ}$$

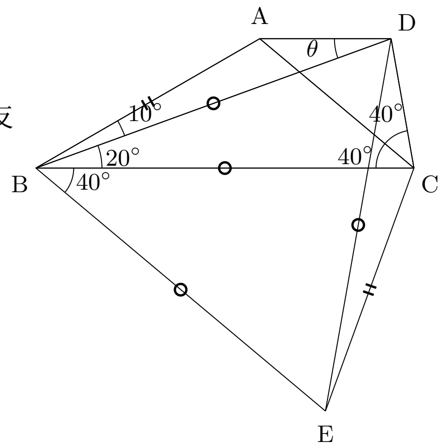
【整角四角形 $Q(10,\ 20,\ 40,\ 40)$】

図の θ の角度を求めよ。



【解答】

[求め方 2]



$\angle\mathrm{BCD} = \angle\mathrm{BDC} = 80^\circ$ より $\triangle\mathrm{BCD}$ は $\mathrm{BC} = \mathrm{BD}$ の二等辺三角形である。

図のように，辺 BD を一辺とする正三角形 BDE を点 A とは反対側に作る。

$\angle\mathrm{CBE} = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ = \angle\mathrm{BCA}$ より $\mathrm{AC} \mathbin{/\!/} \mathrm{BE}$

$\angle\mathrm{BEC} = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ$

$\angle\mathrm{EBA} = 10^\circ + 60^\circ = 80^\circ$

$\angle\mathrm{BEC} = \angle\mathrm{EBA}$ より，四角形 ABEC は**等脚台形**である。

正三角形と等脚台形の**対称性**から $\triangle\mathrm{ABD} \equiv \triangle\mathrm{CED}$

点 B は $\triangle\mathrm{CDE}$ の外心である。

$\angle\mathrm{CDE} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{CBE} = 20^\circ$

$\theta = \angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{CDE} = \mathbf{20^\circ}$

【予備知識】一般に，

$$b = 2a,\ b + c = 60^\circ,\ c + 2d = 120^\circ$$

の関係が成り立つとき，

辺 BD を一辺とする正三角形 BDE を点 A とは反対側に作ると

四角形 ABEC は**等脚台形**で，　$\triangle\mathrm{ABD} \equiv \triangle\mathrm{CED}$

$$\boldsymbol{\theta = \frac{1}{2}c = 60^\circ - d}$$

$Q(10,\ 20,\ 40,\ 40,\ 20)$, $Q(12,\ 24,\ 36,\ 42,\ 18)$

$Q(14,\ 28,\ 32,\ 44,\ 16)$, $Q(15,\ 30,\ 30,\ 45,\ 15)$

$Q(16,\ 32,\ 28,\ 46,\ 14)$, $Q(18,\ 36,\ 24,\ 48,\ 12)$

$Q(20,\ 40,\ 20,\ 50,\ 10)$, $Q(22,\ 44,\ 16,\ 52,\ 8)$