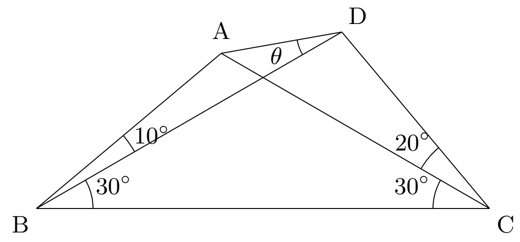
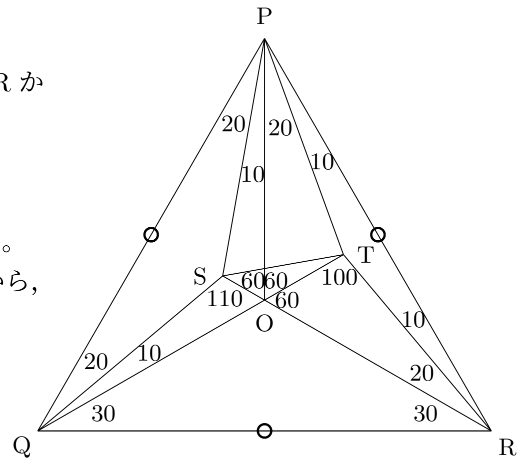
【整角四角形 $Q(10,\ 30,\ 30,\ 20)$】

図の θ の角度を求めよ。



【解答 1 】

図において，単位 (°) を省略する。
正三角形 PQR を作り，Q から PR に下ろした垂線と R から PQ に下ろした垂線の交点を O とする。
また，図のように，
直線 RO 上に $\angle\mathrm{SQO} = 10^\circ$ となるような点 S をとり，
直線 QO 上に $\angle\mathrm{TRO} = 20^\circ$ となるような点 T をとる。
直線 QO と RO がそれぞれ正三角形 PQR の対称軸から，
自明な角は右図のようになる。



$\angle\mathrm{POS} = \angle\mathrm{POT} = 60^\circ$

$\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{SOT} + \angle\mathrm{SPT} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ が成り立つから，

内心と傍心の関係から点 P は $\triangle\mathrm{SOT}$ の**傍心**である。

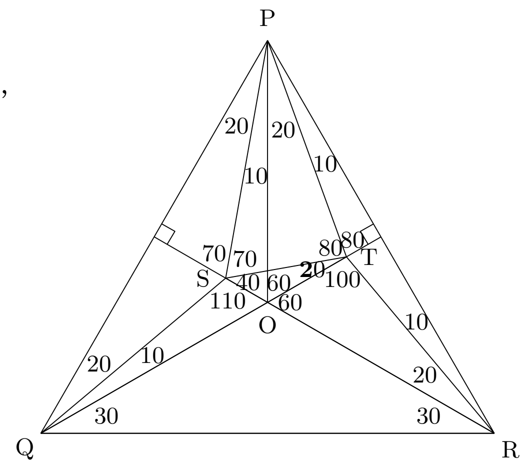
$\angle\mathrm{PST} = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$

$\angle\mathrm{PTS} = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$

$\angle\mathrm{TSO} = 180^\circ - 2\cdot 70^\circ = 40^\circ$

$\angle\mathrm{STO} = 180^\circ - 2\cdot 80^\circ = \mathbf{20^\circ}$

以上より，$\angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{STO} = \mathbf{20^\circ}$



【予備知識】対角線 AC と BD の交点を E とし，
正三角形 BCF を点 A 側に作る。
$a + d = 30^\circ$，$b = c = 30^\circ$ のとき

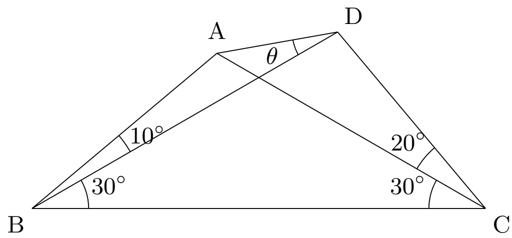
$\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{AED} + \angle\mathrm{AFD} = 90^\circ$ であるから**点 F が $\triangle\mathrm{ADE}$ の傍心である**

$\boldsymbol{\theta = 2a}$ ただし，$a < 15^\circ$

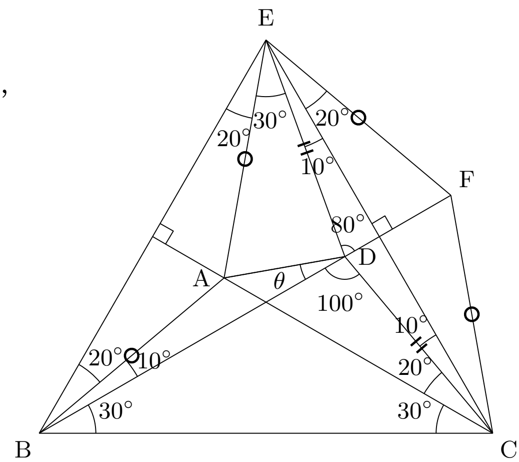
a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e
1	30	30	29	2	6	30	30	24	12	11	30	30	19	22
2	30	30	28	4	7	30	30	23	14	12	30	30	18	24
3	30	30	27	6	8	30	30	22	16	13	30	30	17	26
4	30	30	26	8	9	30	30	21	18	14	30	30	16	28
5	30	30	25	10	10	30	30	20	20					

【整角四角形 $Q(10,\ 30,\ 30,\ 20)$】

図の θ の角度を求めよ。



【解答 2 】



正三角形 BCE を点 A 側に作る。

線分 AC と BD はそれぞれ正三角形 BCE の対称軸から,

$\angle\mathrm{AEB} = \angle\mathrm{ABE} = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$

$\angle\mathrm{DEC} = \angle\mathrm{DCE} = 30^\circ - 20^\circ = 10^\circ$

$\angle\mathrm{AED} = 60^\circ - (20^\circ + 10^\circ) = 30^\circ$

図のように，$\triangle\mathrm{ABE}$ と合同な $\triangle\mathrm{FCE}$ を作ると

$\angle\mathrm{FED} = 20^\circ + 10^\circ = 30^\circ = \angle\mathrm{AED}$

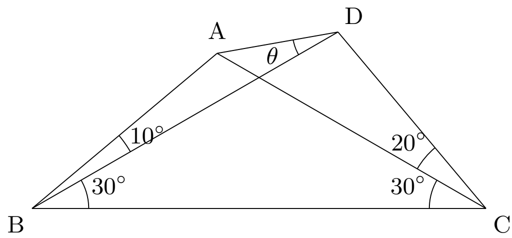
$\mathrm{FE} = \mathrm{AE},\ \mathrm{ED} = \mathrm{ED}$ であるから

$\triangle\mathrm{FED} \equiv \triangle\mathrm{AED}$ よって $\angle\mathrm{ADE} = \angle\mathrm{FDE} = 80^\circ$

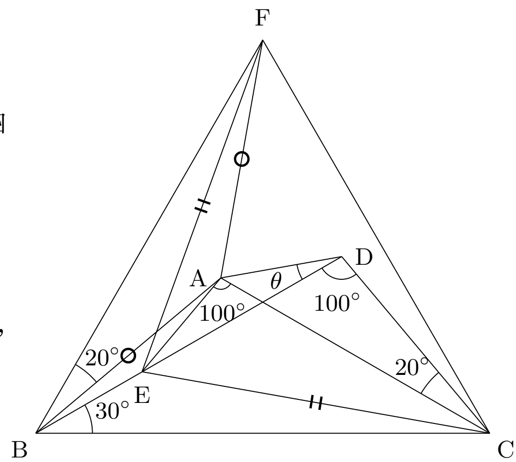
$\angle\mathrm{ADB} = 180^\circ - 2\cdot 80^\circ = \mathbf{20^\circ}$

【整角四角形 $Q(10,\ 30,\ 30,\ 20)$】

図の θ の角度を求めよ。



【解答 3 】



線分 BD 上に AE $=$ BE となる点 E を作ると

$\angle \mathrm{EAC} = 110^\circ - 10^\circ = 100^\circ = \angle \mathrm{EDC}$

2 点 A と D は線分 ED に関して同じ側にあるから，四角形 AECD は円に内接する。

求める角 $\angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{ACE}$

よって，整角三角形 $T(30,\ 10,\ 10,\ 100)$ に帰着する。

正三角形 BCF を点 A 側に作る。

線分 AC と BD はそれぞれ正三角形 BCF の対称軸から，

$\angle \mathrm{AFB} = \angle \mathrm{ABF} = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$

$\angle \mathrm{BCE} = \angle \mathrm{BFE}$ $\cdots\cdots$①

$\angle \mathrm{BEA} + \angle \mathrm{AFB} = 160^\circ + 20^\circ = 180^\circ$ より

四角形 AEBF は円に内接する。

$\angle \mathrm{BFE} = \angle \mathrm{BAE} = 10^\circ$ $\cdots\cdots$①

①，② より $\angle \mathrm{BCE} = 10^\circ$ よって $\angle \mathrm{ACE} = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$

したがって $\angle \mathrm{ADB} = \mathbf{20^\circ}$