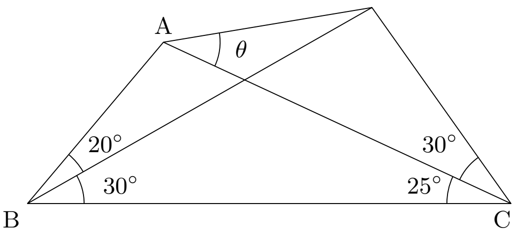
【整角４角形 Q(20, 30, 25, 30)】

次の図で $\angle \mathrm{CAD}$ を求めよ。

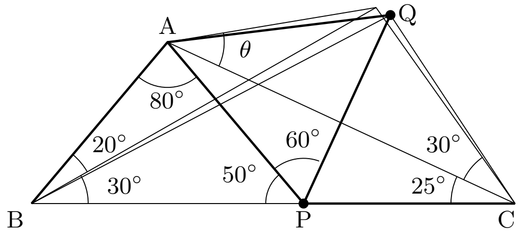
数学セミナー 1997(?) 年 11 月 p.36 より

数学セミナー 1998 年 3 月号 67 ページの 「セミナー Q & A 」欄で取り上げれた質問

問題



解答



【解答】

$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{ABD} + \angle \mathrm{DBC} = 20^\circ + 30^\circ = 50^\circ$, $\angle \mathrm{BCD} = \angle \mathrm{BCA} + \angle \mathrm{ABD} = 25^\circ + 30^\circ = 55^\circ$

まず，線分 BC 上に $\mathrm{AB} = \mathrm{AP}$ を満たす点 P をとると，

$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{ABP} = 50^\circ$

$\triangle \mathrm{PAC}$ の内角と外角の関係から

$\angle \mathrm{PAC} = \angle \mathrm{APB} - \angle \mathrm{ACP} = 50^\circ - 25^\circ = 25^\circ = \angle \mathrm{PCA}$

よって，$\triangle \mathrm{PAC}$ は $\mathrm{PA} = \mathrm{PC}$ の二等辺三角形となる。

線分 AP に関して点 B と反対側に AP を一辺とする正三角形を作り，第 3 の頂点を Q とすると，

$\mathrm{PA} = \mathrm{PQ} = \mathrm{PC}$ であるから，点 P は $\triangle \mathrm{AQC}$ の外心である。

$\angle \mathrm{ACQ} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{APQ} = 30^\circ = \angle \mathrm{ACD}$

ゆえに，**点 Q は直線 CD 上にある。** $\cdots\cdots$①

$\mathrm{AB} = \mathrm{AP} = \mathrm{AQ}$ であるから，点 A は $\triangle \mathrm{BPQ}$ の外心である。

$\angle \mathrm{PBQ} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{PAQ} = 30^\circ = \angle \mathrm{PBD}$

ゆえに，**点 Q は直線 BD 上にある。** $\cdots\cdots$②

①, ② より，**点 Q は問題の点 D と一致する。**

ゆえに，$\angle \mathrm{CAD} = \angle \mathrm{PAD} - \angle \mathrm{PAC} = 60^\circ - 25^\circ = \mathbf{35^\circ}$

二等辺三角形や正三角形を無理矢理つくるのです。

この解答から，問題を【一般化】する。

$\angle \mathrm{DBC} = \angle \mathrm{ACD} = 30^\circ$, $\angle \mathrm{ABC} = 2\angle \mathrm{ACB}$ ならば

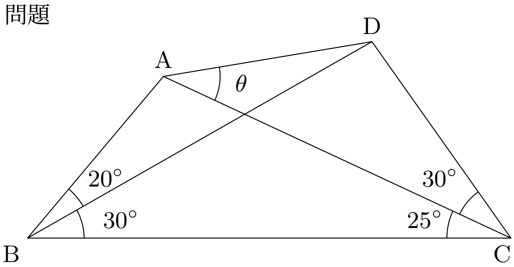
$\angle \mathrm{BCA} + \angle \mathrm{CAD} = 60^\circ$ である。ただし $15^\circ < \angle \mathrm{ACB} < 45^\circ$ です。

【整角４角形 Q(20, 30, 25, 30)】

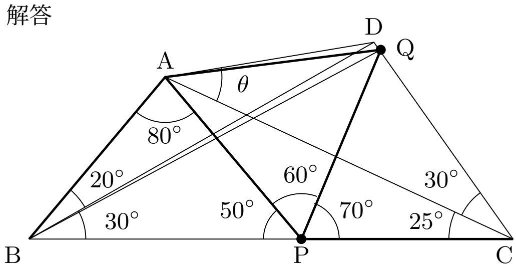
次の図で $\angle\mathrm{CAD}$ を求めよ。

数学セミナー 1997(?) 年 11 月 p36 より

問題



解答



【解答】 $\boxed{\text{別解}}$

$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ABD} + \angle\mathrm{DBC} = 20^\circ + 30^\circ = 50^\circ$, $\angle\mathrm{BCD} = \angle\mathrm{BCA} + \angle\mathrm{ABD} = 25^\circ + 30^\circ = 55^\circ$

まず，**線分 BC 上に AB = AP を満たす点 P をとる**と，

$$\angle\mathrm{APB} = \angle\mathrm{ABP} = 50^\circ$$

$\triangle\mathrm{PAC}$ の内角と外角の関係から

$$\angle\mathrm{PAC} = \angle\mathrm{APB} - \angle\mathrm{ACP} = 50^\circ - 25^\circ = 25^\circ = \angle\mathrm{PCA}$$

よって，$\triangle\mathrm{PAC}$ は $\mathrm{PA} = \mathrm{PC}$ の二等辺三角形となる。

次に，**直線 CD 上に PC = PQ を満たす点 Q をとる**と，

$$\angle\mathrm{PQC} = \angle\mathrm{PCQ} = 50^\circ,\ \angle\mathrm{CPQ} = 180^\circ - 2\angle\mathrm{PCQ} = 70^\circ$$

$$\angle\mathrm{APQ} = 180^\circ - (\angle\mathrm{APB} + \angle\mathrm{CPQ}) = 60^\circ$$

$\mathrm{PA} = \mathrm{PQ} = \mathrm{PQ}$ であるから，$\triangle\mathrm{APQ}$ は正三角形である。

よって，$\triangle\mathrm{ABQ}$ は $\mathrm{AB} = \mathrm{AQ}$ の二等辺三角形である。

$$\angle\mathrm{ABQ} = \angle\mathrm{AQB} = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle\mathrm{BAQ}) = \frac{1}{2}(180^\circ - 80^\circ - 60^\circ) = 20^\circ = \angle\mathrm{ABD}$$

ゆえに，**点 Q は直線 BD 上にある。**

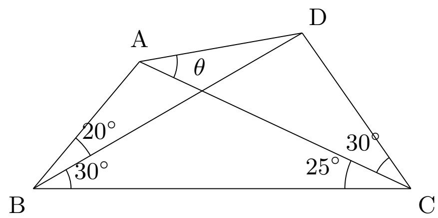
以上のことから，点 Q は 2 直線 CD, BD の交点である。

よって，**点 Q は問題の点 D と一致する。**

ゆえに，$\angle\mathrm{CAD} = \angle\mathrm{PAD} - \angle\mathrm{PAC} = 60^\circ - 25^\circ = \mathbf{35^\circ}$

【整角４角形 Q(20, 30, 25, 30)】

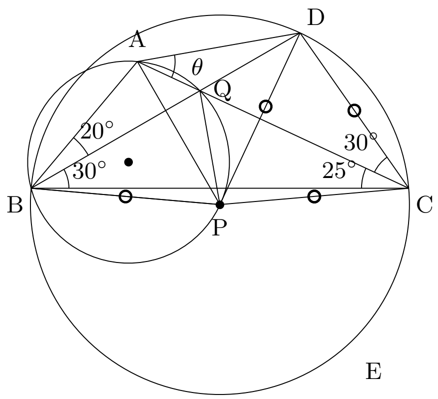
次の図で $\angle \mathrm{CAD}$ を求めよ。
数学セミナー 1997(?) 年 11 月 p36 より



別解 榎本孝一さん (東京都) の解答を参考。
$\triangle \mathrm{BCD}$ の外接円の中心を P とすると，
$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ の円周角と中心角の関係より，

$$\angle \mathrm{CPD} = 2\angle \mathrm{CBD} = 60^\circ$$

よって $\triangle \mathrm{PCD}$ は正三角形である。
$\angle \mathrm{PCA} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \angle \mathrm{DCA}$, $\mathrm{CP} = \mathrm{CD}$ より，
$\triangle \mathrm{ADC} \equiv \triangle \mathrm{APC}$
よって，$\angle \mathrm{CAD} = \angle \mathrm{CAP} \cdots\cdots$ ①



また，対角線 AC と BD の交点を Q とすると
$\triangle \mathrm{QDC} \equiv \triangle \mathrm{QPC}$

$\angle \mathrm{PQC} = \angle \mathrm{DQC} = 30^\circ + 25^\circ = 55^\circ \cdots\cdots$ ②
また $\angle \mathrm{PBC} = \angle \mathrm{PCB} = 60^\circ - 55^\circ = 5^\circ$ より
$\angle \mathrm{ABP} = 20^\circ + 30^\circ + 5^\circ = 55^\circ \cdots\cdots$ ③
②, ③ より，4 点 A, B, P, Q は同一円周上にある。

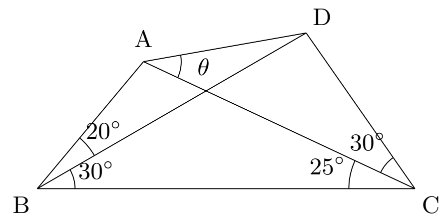
円周角の定理より，

$$\angle \mathrm{QAP} = \angle \mathrm{QBP} = 35^\circ \cdots\cdots ④$$

②, ③ より $\angle \mathrm{CAD} =$ **35°**

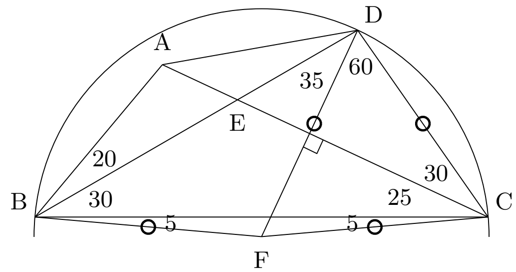
【整角４角形 Q(20, 30, 25, 30)】

次の図で $\angle$CAD を求めよ。
数学セミナー 1997(?) 年 11 月 p36 より



【解答４】

図において，単位 (°) を省略する。
対角線 AC と BD の交点を E とし，△BCD の外心を F とすると，
$\angle$CFD = 2$\angle$CBD = 60° より △DFC は正三角形である。
自明な角は右図のようになる。



直線 BF と AC の交点を G とすると，
$\angle AGB = \angle EGB = 55° - 35° = 20°$
線分 AG は正三角形 DFC の対称軸から，
$\angle AGD = \angle AGB = 20° = \angle ABD$
2 点 B と G は線分 AD から見て同じ側にあるから，
四角形 ABGD は円に内接する。
$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AD}$ より $\angle ADB = \angle ABD =$ **20°**