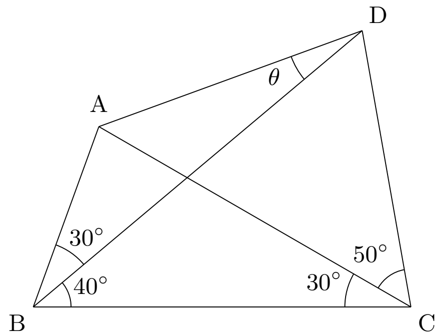
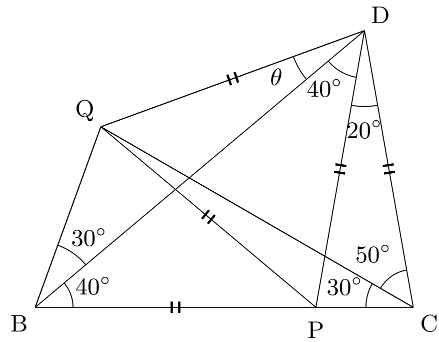
【整角四角形 $Q(30,\ 40,\ 30,\ 50)$】

図の θ の角度を求めよ。



【解答 1】Q(20, 30, 25, 30)

数学セミナーの解法と同じ方法



$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ABD} + \angle\mathrm{DBC} = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$

$\angle\mathrm{BCD} = \angle\mathrm{BCA} + \angle\mathrm{ABD} = 30^\circ + 50^\circ = 80^\circ$

まず，線分 BC 上に $\mathrm{DP} = \mathrm{DC}$ を満たす点 P をとると，

$\quad\angle\mathrm{DPC} = \angle\mathrm{DCP} = 80^\circ$

$\triangle\mathrm{PBD}$ の内角と外角の関係から

$\quad\angle\mathrm{PDB} = \angle\mathrm{DPC} - \angle\mathrm{PBD} = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ = \angle\mathrm{PBD}$

よって，$\triangle\mathrm{PBD}$ は $\mathrm{PB} = \mathrm{PD}$ の二等辺三角形となる。

次に，線分 DP に関して点 C と反対側に DP を一辺とする正三角形を作り，第 3 の頂点を Q とすると，

$\mathrm{PQ} = \mathrm{PB} = \mathrm{PD}$ であるから，点 P は $\triangle\mathrm{QBD}$ の外心である。

$\angle\mathrm{QBD} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{QPD} = 30^\circ = \angle\mathrm{ABD}$

ゆえに，**点 Q は直線 BA 上にある。** $\cdots\cdots$①

$\mathrm{DP} = \mathrm{DC} = \mathrm{DQ}$ であるから，点 D は $\triangle\mathrm{PCQ}$ の外心である。

$\angle\mathrm{PCQ} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{PDQ} = 30^\circ = \angle\mathrm{PCA}$

ゆえに，**点 Q は直線 CA 上にある。** $\cdots\cdots$②

①, ② より，**点 Q は問題の点 A と一致する。**

ゆえに，$\angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{ADP} - \angle\mathrm{BDP} = 60^\circ - 40^\circ = \mathbf{20^\circ}$

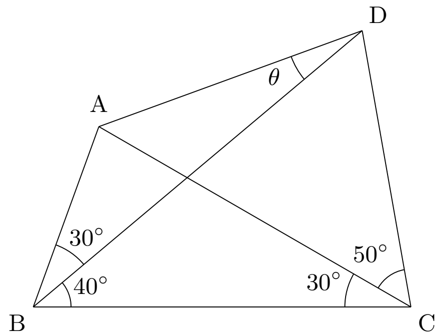
二等辺三角形や正三角形を無理矢理作ります。

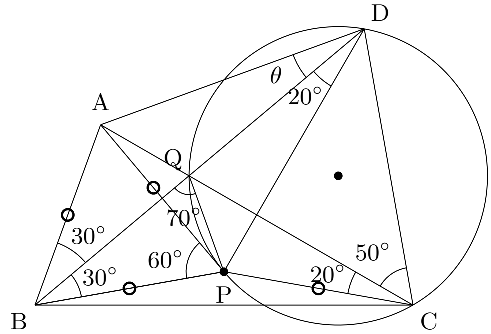
この解答から，問題を【一般化】できる。

$a = c = 30^\circ,\ 2b = c + d$ ならば $\theta = 60^\circ - b$ である。ただし $15^\circ < b < 45^\circ$ とする。

【整角四角形 $Q(30,\ 40,\ 30,\ 50)$】

図の θ の角度を求めよ。





【解答 2】Q(20, 30, 25, 30)

数学セミナーの解法と同じ方法 (榎本孝一さんを参考。)

$\triangle$ABC の外接円の中心を P とすると,

円周角と中心角の関係より,

$$\angle \mathrm{APB} = 2\angle \mathrm{ACB} = 60^\circ$$

よって $\triangle$APB は正三角形である。

$\angle \mathrm{DBP} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \angle \mathrm{DBA}$, BP = BA より,

$\triangle \mathrm{DBP} \equiv \triangle \mathrm{DBA}$ よって $\angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{PDB}$ ……①

$\angle \mathrm{PCB} = \angle \mathrm{PBC} = 40^\circ - 30^\circ = 10^\circ$

よって $\angle \mathrm{ACP} = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$

また，対角線 AC と BD の交点を Q とすると

$\triangle \mathrm{QAB} \equiv \triangle \mathrm{QPB}$

$\angle \mathrm{PQB} = \angle \mathrm{AQB} = \angle \mathrm{QBC} + \angle \mathrm{QCB} = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ$ ……②

また $\angle \mathrm{PCD} = 20^\circ + 50^\circ = 70^\circ$ ……③

②, ③ より，4 点 D, C, P, Q は同一円周上にある。

円周角の定理より,

$$\angle \mathrm{PDQ} = \angle \mathrm{PCQ} = 20^\circ \ \cdots\cdots ④$$

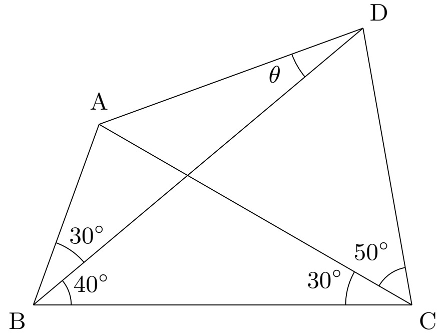
①, ④ より，$\angle \mathrm{ADB} = \mathbf{20^\circ}$

この解答から，問題を【一般化】できる。

$a = c = 30^\circ$, $2b = c + d$ ならば $\theta = 60^\circ - b$ である。ただし $15^\circ < b < 60^\circ$ とする。

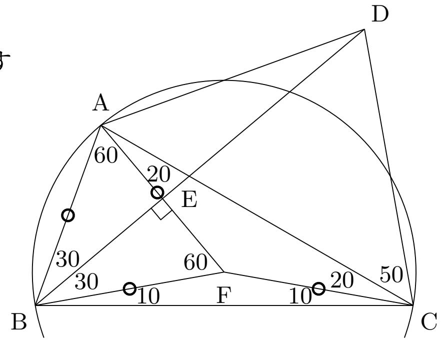
【整角四角形 $Q(30,\ 40,\ 30,\ 50)$】

図の θ の角度を求めよ。

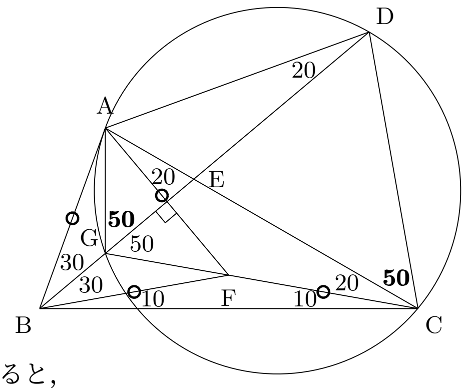


【解答 3】

図において，単位 (°) を省略する。
対角線 AC と BD の交点を E とし，△ABC の外心を F とすると，
$\angle \mathrm{AFB} = 2\angle \mathrm{ACB} = 60^\circ$ より △AFB は正三角形である。
自明な角は右図のようになる。



直線 BD と CF の交点を G とすると，
$\angle \mathrm{CGD} = 40^\circ + 10^\circ = 50^\circ$
線分 DG は正三角形 ABF の対称軸から，
$\angle \mathrm{AGD} = \angle \mathrm{CGD} = 50^\circ = \angle \mathrm{ACD}$
2 点 C と G は線分 AD から見て同じ側にあるから，
四角形 AGCD は円に内接する。
よって，$\angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{ACG} = \mathbf{20^\circ}$



【予備知識】$a = c = 30^\circ,\ 2b = d + 30^\circ$ のとき
△BCD の外心を F とし，直線 BD と CF の交点を G とすると，
線分 DG は正三角形 ABF の対称軸から，四角形 AGCD は円に内接する。
$\angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{ACG}$ より $\boldsymbol{\theta = 60^\circ - b}$ ただし，$15^\circ < b < 60^\circ$

a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e
30	31	30	32	29	30	41	30	52	19	30	51	30	72	9
30	32	30	34	28	30	42	30	54	18	30	52	30	74	8
30	33	30	36	27	30	43	30	56	17	30	53	30	76	7
30	34	30	38	26	30	44	30	58	16	30	54	30	78	6
30	35	30	40	25	30	45	30	60	15	30	55	30	80	5
30	36	30	42	24	30	46	30	62	14	30	56	30	82	4
30	37	30	44	23	30	47	30	64	13	30	57	30	84	3
30	38	30	46	22	30	48	30	66	12	30	58	30	86	2
30	39	30	48	21	30	49	30	68	11	30	59	30	88	1
30	40	30	50	20	30	50	30	70	10					