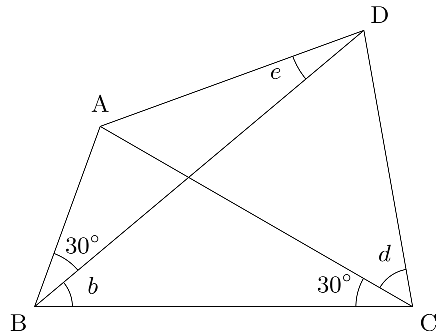
【整角四角形 $Q(30,\ b,\ 30,\ 2b-30)$】

$a=c=30^\circ,\ 2b=c+d$ ならば $e=60^\circ-b$ である。
ただし $15^\circ<b<45^\circ$ とする。



【証明】Q(20, 30, 25, 30) 数学セミナーの解法と同じ方法

まず，線分 BC 上に DP = DC を満たす点 P をとると，

$\angle\mathrm{DPC}=\angle\mathrm{DCP}=2b$

△PBD の内角と外角の関係から

$\angle\mathrm{PDB}=\angle\mathrm{DPC}-\angle\mathrm{PBD}=2b-b=b=\angle\mathrm{PBD}$

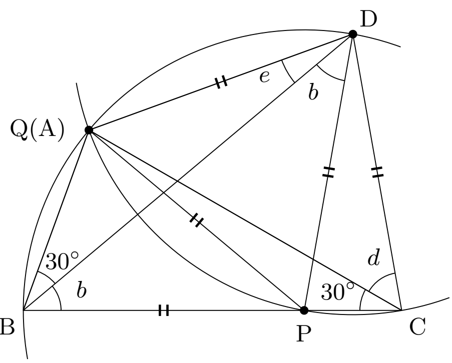
よって，△PBD は PB = PD の二等辺三角形となる。
線分 DP に関して点 C と反対側に DP を一辺とする**正三角形**を作り，第 3 の頂点を Q とすると，
PQ = PB = PD であるから，点 P は △QBD の外心である。

$\angle\mathrm{QBD}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{QPD}=30^\circ=\angle\mathrm{ABD}$ ……①

DP = DC = DQ であるから，点 D は △PCQ の外心である。

$\angle\mathrm{PCQ}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{PDQ}=30^\circ=\angle\mathrm{PCA}$ ……②

①, ② より，**点 Q と点 A と一致する。**
ゆえに，$e=\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{ADP}-\angle\mathrm{BDP}=\boldsymbol{60^\circ-b}$ この公式は $b<60^\circ$ まで拡張できる。



$a<d,\ a=c=30^\circ,\ 2b=c+d$ ならば $e=60^\circ-b$

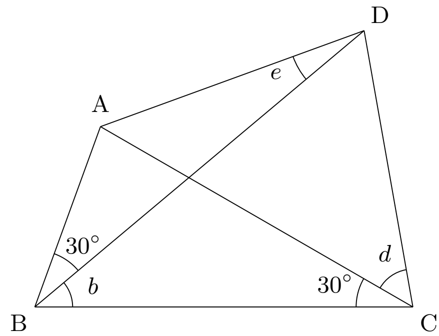
a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e
30	31	30	32	29	30	41	30	52	19	30	51	30	72	9
30	32	30	34	28	30	42	30	54	18	30	52	30	74	8
30	33	30	36	27	30	43	30	56	17	30	53	30	76	7
30	34	30	38	26	30	44	30	58	16	30	54	30	78	6
30	35	30	40	25	30	45	30	60	15	30	55	30	80	5
30	36	30	42	24	30	46	30	62	14	30	56	30	82	4
30	37	30	44	23	30	47	30	64	13	30	57	30	84	3
30	38	30	46	22	30	48	30	66	12	30	58	30	86	2
30	39	30	48	21	30	49	30	68	11	30	59	30	88	1
30	40	30	50	20	30	50	30	70	10					

$a<d,\ b=d=30^\circ,\ 2c=a+b$ ならば $e=60^\circ-c$

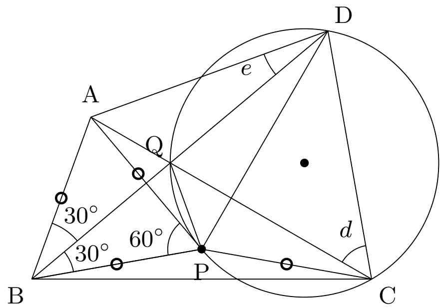
a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e
2	30	16	30	44	12	30	21	30	39	22	30	26	30	34
4	30	17	30	43	14	30	22	30	38	24	30	27	30	33
6	30	18	30	42	16	30	23	30	37	26	30	28	30	32
8	30	19	30	41	18	30	24	30	36	28	30	29	30	31
10	30	20	30	40	20	30	25	30	35					

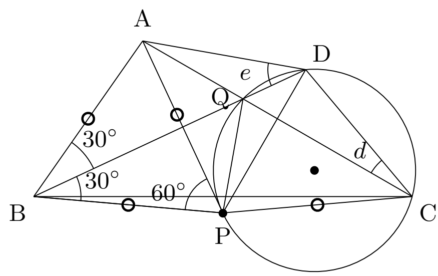
【整角四角形 $Q(30,\ b,\ 30,\ 2b-30)$】

$a=c=30°,\ 2b=c+d$ ならば $e=60°-b$ である。
ただし $15°<b<60°$ とする。



【証明】Q(20, 30, 25, 30) 数学セミナーの解法と同じ方法 (榎本孝一さんを参考。)





△ABC の外接円の中心を P とすると,
円周角と中心角の関係より,

$\angle\mathrm{APB}=2\angle\mathrm{ACB}=60°$

よって △APB は正三角形である。
$\angle\mathrm{DBP}=60°-30°=30°=\angle\mathrm{DBA},\ \mathrm{BP}=\mathrm{BA}$ より,
$\triangle\mathrm{DBP}\equiv\triangle\mathrm{DBA}$ よって $\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{PDB}$ ······①
対角線 AC と BD の交点を Q とすると $\triangle\mathrm{QPB}\equiv\triangle\mathrm{QAB}$
$\angle\mathrm{PQB}=\angle\mathrm{AQB}=\angle\mathrm{QBC}+\angle\mathrm{QCB}=b+30°$ ······②

(i) $30°<b<45°$ のとき
$\angle\mathrm{PCB}=\angle\mathrm{PBC}=\boldsymbol{b-30°}$
よって $\angle\mathrm{ACP}=\angle\mathrm{ACB}-\angle\mathrm{PCB}=30°-(b-30°)=60°-b$
また。$\angle\mathrm{PCD}=\angle\mathrm{BCD}-\angle\mathrm{PCB}=2b-(b-30°)=b+30°$ ······③

(ii) $15°<b<30°$ のとき
$\angle\mathrm{PCB}=\angle\mathrm{PBC}=\boldsymbol{30°-b}$
よって $\angle\mathrm{ACP}=\angle\mathrm{ACB}+\angle\mathrm{PCB}=30°+(30°-b)=60°-b$
また, $\angle\mathrm{PCD}=\angle\mathrm{BCD}+\angle\mathrm{PCB}=2b+(30°-b)=b+30°$ ······③

②, ③ より, 4 点 D, C, P, Q は同一円周上にある。
円周角の定理より,

$\angle\mathrm{PDQ}=\angle\mathrm{PCQ}=60°-b$ ······④

①, ④ より, $\angle\mathrm{ADB}=\boldsymbol{60°-b}$