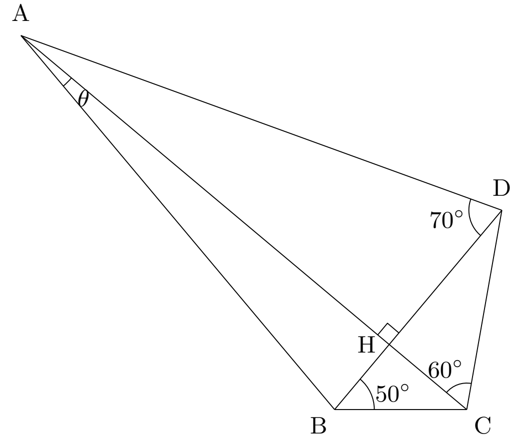
【整角４角形 $Q(40,\ 60,\ 30,\ 70)$】

次の図で ∠BAC を求めよ。



【三角関数利用】

公　式

$$\boldsymbol{\tan 3\theta = \tan(60^\circ + \theta)\tan(60^\circ - \theta)\tan\theta} \cdots\cdots ①$$

$\tan(90^\circ - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$ を用いれば

$$\boldsymbol{\tan\theta = \tan(30^\circ + \theta)\tan(30^\circ - \theta)\tan 3\theta} \cdots\cdots ②$$

① において $\theta = 10^\circ$ とすれば，　$\boldsymbol{\tan 30^\circ \tan 80^\circ = \tan 70^\circ \tan 50^\circ}$

② において $\theta = 10^\circ$ とすれば，　$\boldsymbol{\tan 10^\circ \tan 60^\circ = \tan 20^\circ \tan 40^\circ}$

さらに，　$\boldsymbol{\tan 10^\circ \tan 70^\circ = \tan 30^\circ \tan 40^\circ}$ ，　$\boldsymbol{\tan 10^\circ \tan 50^\circ = \tan 20^\circ \tan 30^\circ}$

$\tan 20^\circ = \dfrac{\mathrm{DH}}{\mathrm{AH}},\ \tan\theta = \dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AH}},\qquad \tan 40^\circ = \dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{CH}},\ \tan 60^\circ = \dfrac{\mathrm{DH}}{\mathrm{CH}}$

$\therefore \tan\theta\tan 60^\circ = \tan 20^\circ\tan 40^\circ$ よって $\theta = 10^\circ$

【初等幾何】

点 A より辺 DC に平行線を引き，辺 CB の延長線との交点を E，線分 ED と対角線 AC の交点を F とおく。

このとき，四角形 AECD は等脚台形なので，△AEF, △DCF は正三角形である。

よって，△BDC ≡ △BDF より，

$\angle\mathrm{BFD} = \angle\mathrm{CBF} = 100^\circ$ となる。

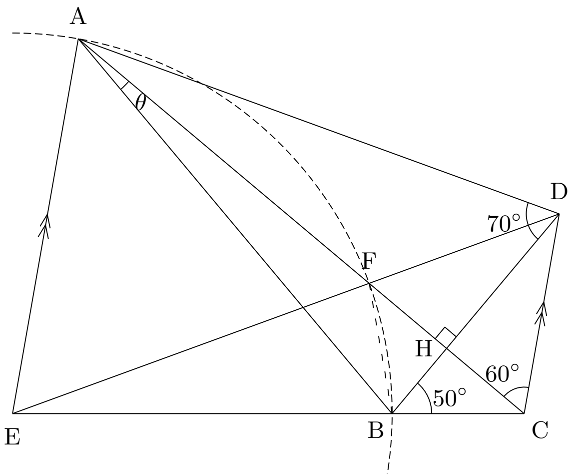
このとき，△EBF は二等辺三角形で，

$\mathrm{EB} = \mathrm{EF} = \mathrm{EA}$ が成り立つ。

よって，3 点 A, F, B は，点 E を中心とする同一円周上にある。

したがって，円周角と中心角の関係より

$2\theta = \angle\mathrm{BEF} = 20^\circ \qquad \therefore \boldsymbol{\theta = 10^\circ}$



【補足】折り紙でひらめく補助線の幾何

△BCD を辺 BD で折り返すと，点 C は対角線 AC 上の点 F に移る。

△CDF は正三角形となる。2 直線 CB, DF の交点を E とすれば，四角形 AECD は等脚台形となる。