数列の和　差分分解と中抜けの原理　　No.1

中抜けの原理

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めるには，$\boldsymbol{a_k = f(k) - f(k-1)}$　☜これを差分分解 という。

となる $f(k)$ を見つければよい。そうすれば

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a_k} = \sum_{k=1}^{n}\{f(k)-f(k-1)\}$$

$$=\{f(1)-f(0)\}+\{f(2)-f(1)\}+\{f(3)-f(2)\}+\cdots+\{f(n)-f(n-1)\}$$

$$=\boldsymbol{f(n)-f(0)}$$

という方法が利用できるからである。

【例題】次の数列の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$

【解】$a_k = k(k+1)(k+2) = \dfrac{1}{4}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}$ と変形できる。

$f(k)=k(k+1)(k+2)(k+3)$ とおくと，$f(0)=0$ より

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}\{f(n)-f(0)\} = \boldsymbol{\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(2k+1)(2k+3)$

【解】$a_k = (2k-1)(2k+1)(2k+3)$

$=\dfrac{1}{8}\{(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)-(2k-3)(2k-1)(2k+1)(2k+3)\}$ と変形できる。

$f(k)=(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)$ とおくと，$f(0)=-1\times1\times3\times5=-15$ より

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(2k+1)(2k+3) = \frac{1}{8}\{f(n)-f(0)\} = \boldsymbol{\frac{1}{8}\{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)+15\}}$$

$$=\boldsymbol{n(n+2)(2n^2+4n-1)}$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$

【解】$a_k = k^3 = \dfrac{1}{4}\{k^2(k+1)^2-(k-1)^2k^2\}$ と変形できる。

$f(k)=k^2(k+1)^2$ とおくと，$f(0)=0$ より

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\{f(n)-f(0)\} = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \boldsymbol{\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}$$　☜ **公式**

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^7+k^5)$

【解】$k^7+k^5=k^4\cdot k(k^2+1)$，$(k+1)^2+(k-1)^2=2(k^2+1)$，$(k+1)^2-(k-1)^2=4k$ だから

$a_k=k^7+k^5=\dfrac{1}{8}\{k^4(k+1)^4-(k-1)^4k^4\}$ と変形できる。

$f(k)=k^4(k+1)^4$ とおくと，$f(0)=0$ より

$$\sum_{k=1}^{n}(k^7+k^5) = \frac{1}{8}\{f(n)-f(0)\} = \boldsymbol{\frac{1}{8}n^4(n+1)^4}$$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

【解】$a_k = \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1} = -\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k}\right)$ と変形できる。

$f(k)=\dfrac{1}{k+1}$ とおくと，$f(0)=1$ より $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = -\{f(n)-f(0)\} = 1-\frac{1}{n+1} = \boldsymbol{\frac{n}{n+1}}$

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$

【解】$a_k = \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = -\dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}-\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}\right\}$

$f(k)=\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ とおくと，$f(0)=\dfrac{1}{3}$ より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = -\frac{1}{4}\{f(n)-f(0)\} = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}}$$

(7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$

【解】$a_k = \dfrac{k}{(k+1)!} = \dfrac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!} = -\left\{\dfrac{1}{(k+1)!}-\dfrac{1}{k!}\right\}$ と変形できる。

$f(k)=\dfrac{1}{(k+1)!}$ とおくと，$f(0)=1$ より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} = -\{f(n)-f(0)\} = \boldsymbol{1-\frac{1}{(n+1)!}}$$

(8) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{k(k+1)(k+2)}$

【解】

$a_k = \dfrac{2k-1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{2}{(k+1)(k+2)}-\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$

$=-2\left(\dfrac{1}{k+2}-\dfrac{1}{k+1}\right)+\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}-\dfrac{1}{k(k+1)}\right\}$ と変形できる。

$f(k)=\dfrac{1}{k+2}$，$g(k)=\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$ とおくと，$f(0)=\dfrac{1}{2}$，$g(0)=\dfrac{1}{2}$ より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{k(k+1)(k+2)} = -2\{f(n)-f(0)\}+\frac{1}{2}\{g(n)-g(0)\}$$

$$=-2\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{2(n+1)(n+2)} = \frac{3(n+1)(n+2)-8(n+1)+2}{4(n+1)(n+2)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{n(3n+1)}{4(n+1)(n+2)}}$$

数列の和　差分分解と中抜けの原理　　No.2

(9) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$

【解】

$$a_k = \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k^2}{4k^2-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4k^2}{4k^2-1} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4k^2-1}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right)$$ と変形できる。

$f(k) = \dfrac{1}{2k+1}$ とおくと，$f(0)=1$ より

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n}{4} - \frac{1}{8}\{f(n)-f(0)\}$$

$$= \frac{n}{4} + \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \boldsymbol{\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}}$$

(10) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+3)}$

【解】

$\dfrac{1}{k(k+1)(k+3)} = \dfrac{a}{k(k+1)} + \dfrac{b}{(k+1)(k+3)}$ とすると $a = \dfrac{1}{3},\ b = -\dfrac{1}{3}$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = -\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$\frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+2)(k+3)}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right) + \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2}\right)\right\}$$

と変形できる。

$f(k) = \dfrac{1}{k+1}$ とおくと，$f(0)=1,\ f(1)=\dfrac{1}{2},\ f(2)=\dfrac{1}{2},\ f(n+1)=\dfrac{1}{n+2},\ f(n+2)=\dfrac{1}{n+3}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+3)} = -\frac{1}{3}\{f(n)-f(0)\} + \frac{1}{6}\{(f(n+1)-f(1)) + (f(n+2)-f(2))\}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1} - 1\right) + \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$= \frac{n(7n^2+42n+59)}{36(n+1)(n+2)(n+3)}$$

(11) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}$

【解】

$a_k = \dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{2} = \dfrac{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}) - (\sqrt{k}+\sqrt{k-1})}{2}$ と変形できる。

$f(k) = \sqrt{k+1}+\sqrt{k}$ とおくと，$f(0)=1$ より

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}} = \frac{f(n)-f(0)}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-1}{2}}$$

(12) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)\cdot 3^{k-1}$　　☜ (等差数列) × (等比数列) の和

【解】$a_k = (2k-1)\cdot 3^{k-1} = (pk+q)\cdot 3^k - \{p(k-1)+q\}\cdot 3^{k-1}$ を満たす $p,\ q$ を求める。

$$(pk+q)\cdot 3^k - \{p(k-1)+q\}\cdot 3^{k-1} = \{3(pk+q) - p(k-1) - q\}\cdot 3^{k-1}$$

$$= (2pk + p + 2q)\cdot 3^{k-1}$$

係数を比較して，$\begin{cases} 2p &= 2 \\ p+2q &= -1 \end{cases}$ これを解いて，$\boldsymbol{p=1,\ q=-1}$

よって，$a_k = (k-1)\cdot 3^k - (k-2)\cdot 3^{k-1}$ と変形できる。

$f(k) = (k-1)\cdot 3^k$ とおくと，$f(0) = -1\cdot 1 = -1$ より

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)\cdot 3^{k-1} = f(n) - f(0) = \boldsymbol{(n-1)\cdot 3^n + 1}$$

(13) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\cdot 2^k$　　☜ (2 次式) × (等比数列) の和

【解】$f(k) = (pk^2+qk+r)\cdot 2^{k+1}$ とすると，

$$k^2\cdot 2^k = f(k) - f(k-1)$$

$$= (pk^2+qk+r)\cdot 2^{k+1} - \{p(k-1)^2 + q(k-1) + r\}\cdot 2^k$$

$$= \{2(pk^2+qk+r) - p(k-1)^2 - q(k-1) - r\}\cdot 2^k$$

$$= \{pk^2 + (2p+q)k + (-p+q+r)\}\cdot 2^k$$

係数を比較して，$\begin{cases} p &= 1 \\ 2p+q &= 0 \\ -p+q+r &= 0 \end{cases}$ これを解いて，$\boldsymbol{p=1,\ q=-2,\ r=3}$

よって，$f(k) = (k^2-2k+3)\cdot 2^{k+1}$．$f(0) = 3\cdot 2 = 6$ より

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\cdot 2^k = f(n) - f(0) = \boldsymbol{(n^2-2n+3)\cdot 2^{n+1} - 6}$$