## ド・モアブルの定理を用いた三角級数の和

$n$ は自然数。$z \fallingdotseq 1$ のとき $1+z+z^2+\cdots+z^n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$ に

$z=\cos\theta+i\sin\theta$ を代入して，次式を証明せよ。ただし， $\sin\dfrac{\theta}{2} \fallingdotseq 0$

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{\boldsymbol{\sin\dfrac{n+1}{2}\theta\cos\dfrac{n}{2}\theta}}{\boldsymbol{\sin\dfrac{\theta}{2}}}$$

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta=\frac{\boldsymbol{\sin\dfrac{n+1}{2}\theta\sin\dfrac{n}{2}\theta}}{\boldsymbol{\sin\dfrac{\theta}{2}}}$$

(モノグラフ 4. 三角関数)

【証明】

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta,\ \dfrac{1+\cos\theta}{2}=\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ を利用する。

$$\begin{aligned}1+z+z^2+\cdots+z^n&=1+(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta+i\sin\theta)^2+\cdots+(\cos\theta+i\sin\theta)^n\\&=1+(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)+\cdots+(\cos n\theta+i\sin n\theta)\\&=(1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos n\theta)+i\,(\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta)\cdots①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1-z^{n+1}}{1-z}&=\frac{1-(\cos\theta+i\sin\theta)^{n+1}}{1-(\cos\theta+i\sin\theta)}\\&=\frac{\{1-\cos(n+1)\theta\}-i\sin(n+1)\theta}{(1-\cos\theta)-i\sin\theta}\\&=\frac{2\sin^2\dfrac{n+1}{2}\theta-2i\sin\dfrac{n+1}{2}\theta\cos\dfrac{n+1}{2}\theta}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}-2i\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}\\&=\frac{\sin\dfrac{n+1}{2}\theta\left(\sin\dfrac{n+1}{2}\theta-i\cos\dfrac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\dfrac{\theta}{2}\left(\sin\dfrac{\theta}{2}-i\cos\dfrac{\theta}{2}\right)}\end{aligned}$$

分母, 分子に $i$ を掛けて $i\,(\sin\phi-i\cos\phi)=\cos\phi+i\sin\phi$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{1-z^{n+1}}{1-z}&=\frac{\sin\dfrac{n+1}{2}\theta\left(\cos\dfrac{n+1}{2}\theta+i\sin\dfrac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\dfrac{\theta}{2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)}\\&=\frac{\sin\dfrac{n+1}{2}\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{n}{2}\theta+i\sin\frac{n}{2}\theta\right)\cdots②\end{aligned}$$

①, ② は等しいから，その実数部分と虚数部分を等置して証明すべき 2 式が一挙に得られる。

**オイラーの公式を用いた三角級数の和**

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を用いて，次式を証明せよ。

$$\sum_{k=0}^{n}\cos kx=\frac{\boldsymbol{\cos\frac{n}{2}x\ \sin\frac{n+1}{2}x}}{\boldsymbol{\sin\frac{x}{2}}}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sin kx=\frac{\boldsymbol{\sin\frac{n}{2}x\ \sin\frac{n+1}{2}x}}{\boldsymbol{\sin\frac{x}{2}}}$$

【証明】

$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$ より

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\qquad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

として計算することも可能であるが計算が面倒であるから，最初から指数関数の和の形で求める。

$$\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}=\sum_{k=0}^{n}\cos kx+i\sum_{k=0}^{n}\sin kx\ \cdots①$$

$$\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}=\frac{e^{(n+1)ix}-1}{e^{ix}-1}$$

$$\begin{aligned}e^{ix}-1&=e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}\right)\\&=2i\,e^{\frac{ix}{2}}\frac{e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}}{2i}\\&=2i\,e^{\frac{ix}{2}}\sin\frac{x}{2}\\e^{(n+1)ix}-1&=e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\left\{e^{\frac{i(n+1)x}{2}}-e^{\frac{-i(n+1)x}{2}}\right\}\\&=2i\,e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\sin\frac{n+1}{2}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{e^{(n+1)ix}-1}{e^{ix}-1}&=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\exp\left(\frac{inx}{2}\right)\\&=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{n}{2}x+i\sin\frac{n}{2}x\right)\ \cdots②\end{aligned}$$

①，② は等しいから，その実数部分と虚数部分を等置して証明すべき 2 式が一挙に得られる。