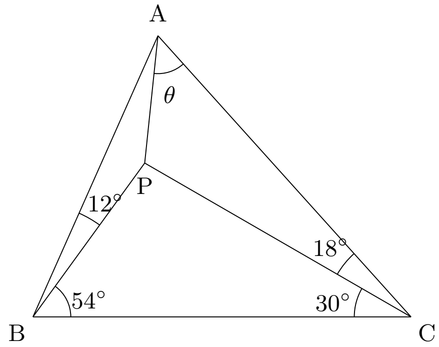
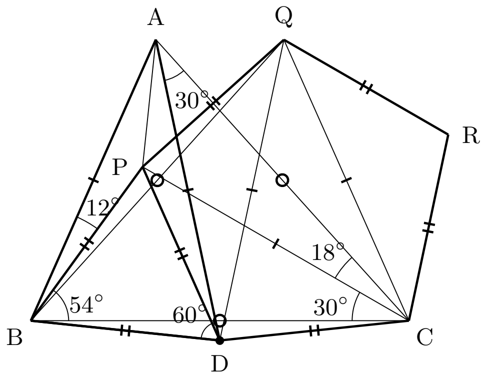
整角三角形 T(12,54,30,18)

$\boxed{\text{問}}$ $\triangle ABC$ の内部に点 P を
$\angle PBA = 12^\circ,\ \angle PBC = 54^\circ,\ \angle PCB = 30^\circ,\ \angle PCA = 18^\circ$
となるようにとるとき、$\angle PAC$ の大きさを求めよ。



【求め方】初等幾何



$\angle CAB = \angle CBA = 66^\circ$ より $CA = CB$
$\triangle BCP$ の外心を D とすると
$DB = DP = DC,\ \angle BDP = 2\angle BCP = 60^\circ$ より $\triangle BDP$ は正三角形である。
よって，$BP = CD$
$\angle ACD = 48^\circ + 6^\circ = 54^\circ = \angle CBP$
2 辺夾角相等より $\triangle PBC \equiv \triangle DCA$
よって，$PC = AD\ \cdots$①
$\angle DAC = \angle PCB = 30^\circ$ より $\angle BAD = 66^\circ - 30^\circ = 36^\circ$

$DC = DP,\ \angle CDP = 2\angle CBP = 108^\circ$ より
線分 CD, DP を隣り合う 2 辺とする正五角形 CDPQR を作ることができる。
$PB = PQ$ より $\triangle PBQ$ は二等辺三角形であり，$\triangle PBQ \equiv \triangle DBC$
$\triangle QBC$ は $BQ = BC$ の二等辺三角形である。
$\angle QBC = 54^\circ - 6^\circ = 48^\circ = \angle ACB$
よって 2 つの二等辺三角形 ACB と QBC は合同である。
$AB = QC = PC\ \cdots$②
①, ② より $AB = AD$
よって $\triangle ABD$ は $AB = AC,\ \angle BDE = 36^\circ$ の二等辺三角形である。
線分 AP は $\triangle ABD$ と正三角形 PBD の対称軸である。
$\angle PAD = \dfrac{1}{2}\angle BAD = 18^\circ$
$\angle PAC = 30^\circ + 18^\circ = \mathbf{48^\circ}$