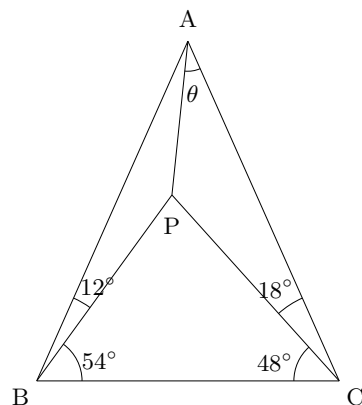


—— 整角三角形 T(12,54,48,18) ——

問 $\triangle ABC$ の内部に点 P を

$\angle PBA = 12^\circ$, $\angle PBC = 54^\circ$, $\angle PCB = 48^\circ$, $\angle PCA = 18^\circ$

となるようにとるとき、 $\angle PAC$ の大きさを求めよ。

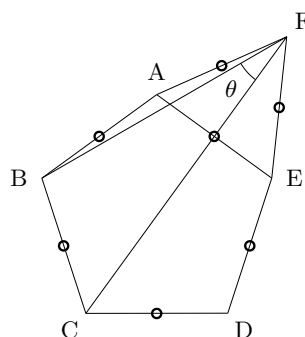


【準備】

—— 正三角形と正五角形が作る角度 ——

正五角形 $ABCDE$ と正三角形 FAE を組み合わせた図形です。

$\angle BFC = 24^\circ$ である。



【証明】

正五角形 $ABCDE$ と正三角形 FAE は線分 CF に関して対称である。

$\angle BAF = 108^\circ + 60^\circ = 168^\circ$ より $\angle AFB = \frac{1}{2}(180^\circ - 168^\circ) = 6^\circ$

$\angle BFC = 30^\circ - 6^\circ = 24^\circ$

【求め方】 初等幾何

$\angle ABC = \angle ACB = 66^\circ$ より $AB = AC$

$\triangle BCP$ の外心を D とすると $DB = DC$ より $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$

$\angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC = 24^\circ$

$DP = DC$, $\angle PDC = 2\angle PBC = 108^\circ$ より

線分 CD , DP を隣り合う 2 辺とする

正五角形 $CDPQR$ を作ることができる。

$\triangle PCQ$ は $CP = CQ$ の二等辺三角形である。

$\angle QCA = 36^\circ - 18^\circ = 18^\circ = \angle PCA$ より $\triangle PCA \equiv \triangle QCA$

$\triangle PAQ$ は $AP = AQ$ の二等辺三角形である。

線分 AC は二等辺三角形 $\triangle PCQ$ と $\triangle PAQ$ の対称軸である。

正三角形 $A'PQ$ を PQ からみて点 A と同じ側に作ると、 $\angle CA'D = 24^\circ$

線分 AC は正三角形 $A'PQ$ の対称軸であるから、点 A' は点 A と一致する。

$\angle PAC = \frac{1}{2}\angle PAQ = 30^\circ$

