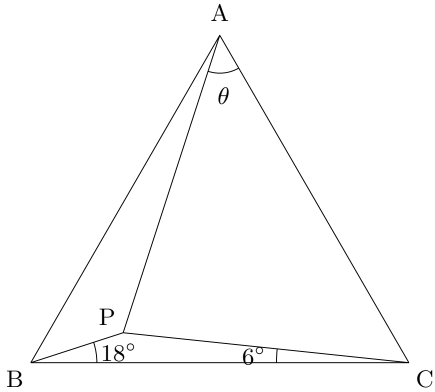
整角三角形 T(42,18,6,54)

$\boxed{\text{問}}$ 正三角形 ABC の内部に点 P を

$\angle \mathrm{PBC} = 18^\circ,\ \angle \mathrm{PCB} = 6^\circ$

となるようにとるとき、∠PAC の大きさを求めよ。



線分 BC 上に $\angle \mathrm{BPC} = 144^\circ$ となるように点 Q をとると,

$\angle \mathrm{PBQ} = \angle \mathrm{PQB} = 18^\circ$ より $\mathrm{PB} = \mathrm{PQ}$

線分 CP 上に $\angle \mathrm{PQR} = 156^\circ$ となるように点 R をとると,

$\angle \mathrm{QPR} = \angle \mathrm{QRP} = 12^\circ$ より $\mathrm{QP} = \mathrm{QR}$

$\angle \mathrm{RQC} = \angle \mathrm{RCQ} = 6^\circ$ より $\mathrm{RQ} = \mathrm{RC}$

ここで，点 S が直線 QR から見て点 P と反対側にくるように

正三角形 SQR を作ると

$\mathrm{RC} = \mathrm{RQ} = \mathrm{RS}$ より点 R は △CQS の外心である。

よって $\angle \mathrm{QCS} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{QRS} = 30^\circ,\ \angle \mathrm{PCS} = 6^\circ + 30^\circ = 36^\circ$

同様に $\mathrm{QP} = \mathrm{QR} = \mathrm{QS}$ より点 Q は △PRS の外心である。

よって $\angle \mathrm{RPB} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{RQS} = 30^\circ$

点 T が直線 CP から見て点 A と反対側にくるように

正三角形 CPT を作ると

$\angle \mathrm{TPS} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$

2 辺と夾角相等より $\triangle \mathrm{PTS} \equiv \triangle \mathrm{PCS}$

$\angle \mathrm{PTS} = \angle \mathrm{PCS} = 36^\circ \qquad \cdots\cdots ①$

△PRS の外接円と線分 PT との交点で点 P と

異なる点を U とすると

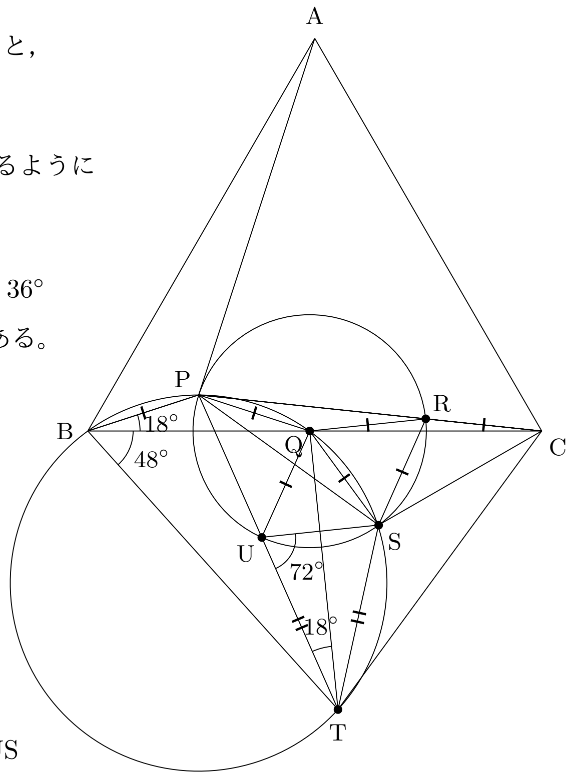
$\angle \mathrm{TUS} = \angle \mathrm{PRS} = 12^\circ + 60^\circ = 72^\circ \qquad \cdots\cdots ②$

①, ② より $\angle \mathrm{TSU} = 180^\circ - (72^\circ + 36^\circ) = 72^\circ = \angle \mathrm{TUS}$

よって $\mathrm{AS} = \mathrm{AU}$

3 辺相等より $\triangle \mathrm{TUQ} \equiv \triangle \mathrm{TSQ}$

$\angle \mathrm{UTQ} = \angle \mathrm{STQ} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{UTS} = 18^\circ$ ☜$T(48, 12, 6, 54)$ の証明と同じ



$\angle \mathrm{PBQ} = \angle \mathrm{PCQ} = 18^\circ$

2 点 B, T は直線 PQ に関して同じ側にあるから

四角形 BPQT は円に内接する。

よって，$\angle \mathrm{QBT} = \angle \mathrm{QPT} = 60^\circ - \angle \mathrm{QPC} = 48^\circ$

$\angle \mathrm{ACP} = \angle \mathrm{BCT} = 60^\circ - 6^\circ = 54^\circ$

2 辺と夾角相等より $\triangle \mathrm{ACP} \equiv \triangle \mathrm{BCT}\ \therefore\ \angle \mathrm{PAC} = \angle \mathrm{TBC} = \mathbf{48^\circ}$