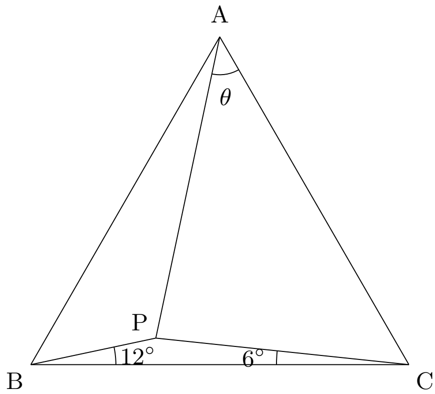
整角三角形 **T(48,12,6,54)**

$\boxed{\text{問}}$ 正三角形 ABC の内部に点 P を

$\angle\mathrm{PBC} = 12^\circ$, $\angle\mathrm{PCB} = 6^\circ$

となるようにとるとき、$\angle\mathrm{PAC}$ の大きさを求めよ。



線分 BC 上に $\angle\mathrm{BPC} = 156^\circ$ となるように点 Q をとると，

$\angle\mathrm{PBC} = \angle\mathrm{PQB} = 12^\circ$ より $\mathrm{PB} = \mathrm{PQ}$

$\angle\mathrm{QPC} = \angle\mathrm{QCP} = 6^\circ$ より $\mathrm{QP} = \mathrm{QC}$

ここで，点 R が直線 PQ から見て点 B と反対側にくるように正三角形 RPQ を作ると

$\mathrm{QC} = \mathrm{QP} = \mathrm{QR}$ より点 Q は $\triangle\mathrm{CPR}$ の外心である。

よって $\angle\mathrm{PCR} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{PQR} = 30^\circ$, $\angle\mathrm{BCR} = 6^\circ+30^\circ = 36^\circ$

同様に $\mathrm{PB} = \mathrm{PQ} = \mathrm{PR}$ より点 P は $\triangle\mathrm{BQR}$ の外心である。

よって $\angle\mathrm{QBR} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{QPR} = 30^\circ$

$\angle\mathrm{ABR} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$

2 辺と夾角相等より $\triangle\mathrm{BAR} \equiv \triangle\mathrm{BCR}$

$\angle\mathrm{BAR} = \angle\mathrm{BCR} = 36^\circ$ $\cdots\cdots$①

$\triangle\mathrm{BQR}$ の外接円と線分 AB との交点で点 B と異なる点を S とすると

$\angle\mathrm{ASR} = \angle\mathrm{BQR} = 12^\circ + 60^\circ = 72^\circ$ $\cdots\cdots$②

①, ② より $\angle\mathrm{ARS} = 180^\circ - (72^\circ + 36^\circ) = 72^\circ = \angle\mathrm{ASR}$

よって $\mathrm{AR} = \mathrm{AS}$

3 辺相等より $\triangle\mathrm{ASP} \equiv \triangle\mathrm{ARP}$

$\angle\mathrm{SAP} = \angle\mathrm{RAP} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{SAR} = 18^\circ$

$\angle\mathrm{PAC} = 60^\circ - 18^\circ = \mathbf{42^\circ}$