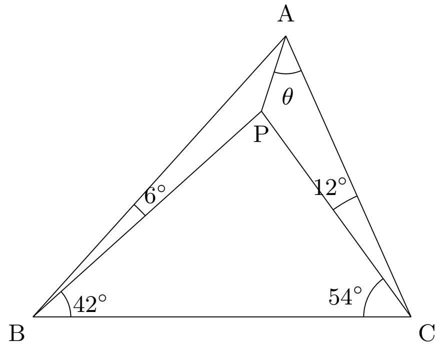
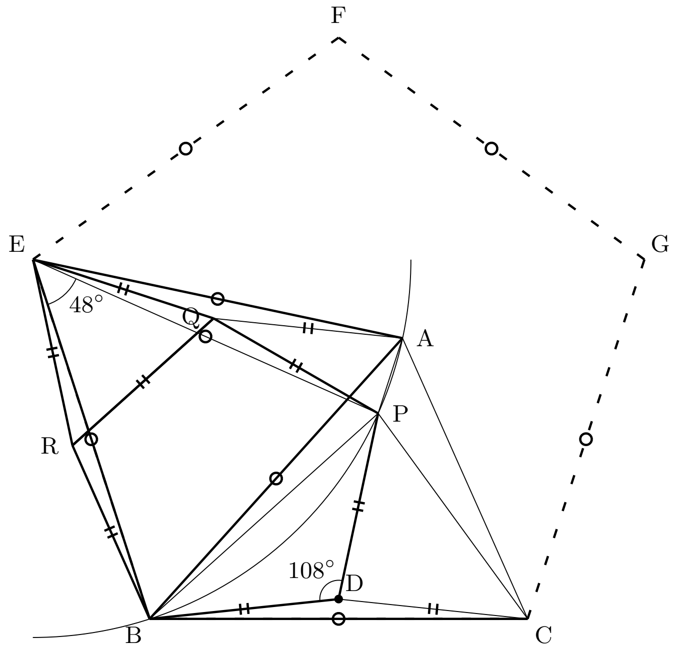
整角三角形 T(6,42,54,12)

$\boxed{\text{問}}$ $\triangle$ABC の内部に点 P を
$\angle \mathrm{PBA} = 6^\circ,\ \angle \mathrm{PBC} = 42^\circ,\ \angle \mathrm{PCB} = 54^\circ,\ \angle \mathrm{PCA} = 12^\circ$
となるようにとるとき、$\angle$PAC の大きさを求めよ。



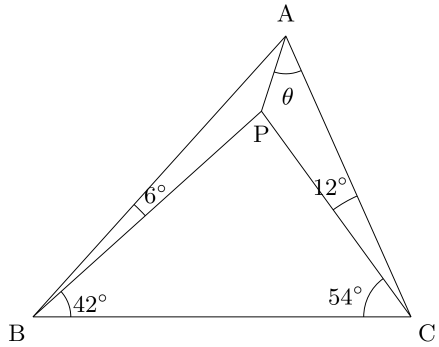
【求め方 1】初等幾何

$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{BCA} = 66^\circ$ より BA = BC
$\triangle$BCP の外心を D とすると
$\mathrm{BD} = \mathrm{DP},\ \angle \mathrm{BDP} = 2\angle \mathrm{BCP} = 108^\circ$ より
線分 BD, DP を隣り合う 2 辺とする
正五角形 BDPQR を作ることができるから,
DB = DC = DP = PQ = QR = RB
また，正三角形 ABE を AB からみて C と反対側に作ると,
AB = BC = AE = BE
$\angle \mathrm{EBC} = 48^\circ + 60^\circ = 108^\circ$ より
線分 CB, BE を隣り合う 2 辺とする
正五角形 CBEFG を作ることができる。
2 つの正五角形が点 B を共有しているから $\triangle \mathrm{RBE} \equiv \triangle \mathrm{DBC}$
RE = DC = DB = RB = RQ
$\angle \mathrm{BRE} = \angle \mathrm{BDC} = 2\angle \mathrm{BPC} = 168^\circ$
$\angle \mathrm{ERQ} = 168^\circ - 108^\circ = 60^\circ$ より $\triangle$ERQ は正三角形。
2 つの正三角形が点 E を共有しているから $\triangle \mathrm{QEA} \equiv \triangle \mathrm{REB}$
ゆえに QE = QA = QP
$\angle \mathrm{EQP} = 60^\circ + 108^\circ = 168^\circ = \angle \mathrm{EQA}$ より $\triangle \mathrm{PEQ} \equiv \triangle \mathrm{AEQ}$
よって EP = EA = EB
ゆえに 点 E は $\triangle$ABP の外心である。
$\angle \mathrm{PAB} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{PSB} = \dfrac{1}{2}(60^\circ - 2 \cdot 6^\circ) = 24^\circ$
$\angle \mathrm{PAC} = 66^\circ - 24^\circ = \mathbf{42^\circ}$

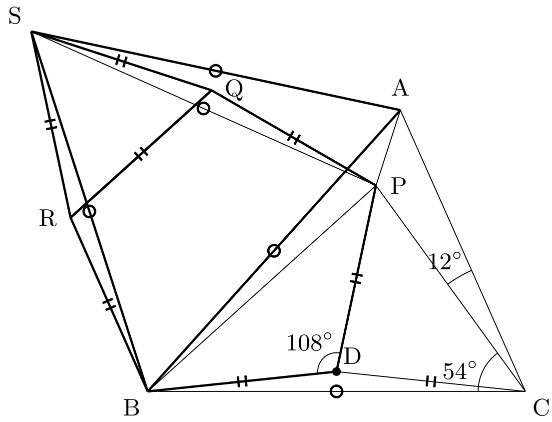


整角三角形 T(6,42,54,12)

$\boxed{\text{問}}$ $\triangle$ABC の内部に点 P を
$\angle \mathrm{PBA} = 6^\circ$, $\angle \mathrm{PBC} = 42^\circ$, $\angle \mathrm{PCB} = 54^\circ$, $\angle \mathrm{PCA} = 12^\circ$
となるようにとるとき、$\angle$PAC の大きさを求めよ。



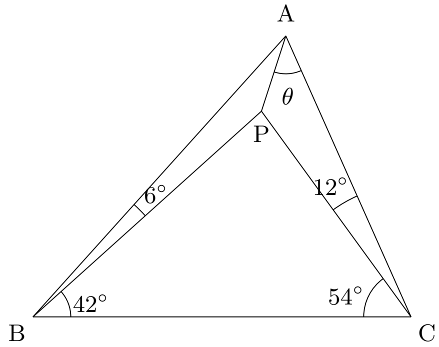
【求め方 2】初等幾何



$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{BCA} = 66^\circ$ より BA = BC
$\triangle$BCP の外心を D とすると
$\mathrm{BD} = \mathrm{DP}$, $\angle \mathrm{BDP} = 2\angle \mathrm{BCP} = 108^\circ$ より
線分 BD, DP を隣り合う 2 辺とする
正五角形 BDPQR を作ることができる。
また，正三角形 RQS を QR からみて D と反対側にを作ると，
$\mathrm{BD} = \mathrm{CD} = \mathrm{BR} = \mathrm{RS} = \mathrm{SQ} = \mathrm{PQ}$
$\angle \mathrm{BDC} = 2\angle \mathrm{BPC} = 2 \cdot 84^\circ = 168^\circ$
$\angle \mathrm{BRS} = \angle \mathrm{PQS} = 108^\circ + 60^\circ = 168^\circ$
より，2 辺夾角相等で $\triangle \mathrm{BCD} \equiv \triangle \mathrm{BSR} \equiv \triangle \mathrm{PSQ}$
よって $\mathrm{BC} = \mathrm{BS} = \mathrm{PS}$
BA = BC より BS = BA
$\angle \mathrm{ABS} = 72^\circ - 6^\circ - 6^\circ = 60^\circ$ より $\triangle$ABS は正三角形。
ゆえに SA = SB = SP より，点 S は $\triangle$ABP の外心である。
$\angle \mathrm{PAB} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{PSB} = \dfrac{1}{2}(60^\circ - 2 \cdot 6^\circ) = 24^\circ$
$\angle \mathrm{PAB} = 66^\circ - 24^\circ = \mathbf{42^\circ}$

整角三角形 T(6,42,54,12)

問 $\triangle ABC$ の内部に点 P を
$\angle PBA = 6^\circ$, $\angle PBC = 42^\circ$, $\angle PCB = 54^\circ$, $\angle PCA = 12^\circ$
となるようにとるとき、$\angle PAC$ の大きさを求めよ。



【求め方 3】三角関数利用

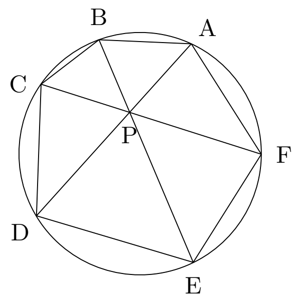
円に内接する六角形と対角線 (弦に関するチェバの定理)

円に内接する六角形 ABCDEF の対角線 AD, BE, CF が 1 点で交わるならば
$AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$
が成り立つ。 また，逆も成り立つ。
(モノグラフ・幾何学 p45 問題 7 の 14 の改題)

【証明】3 つの対角線の交点を P とすると
$\triangle PAB \backsim \triangle PED$, $\triangle PBC \backsim \triangle PFE$, $\triangle PCD \backsim \triangle PAF$ より

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AP}{EP},\ \frac{EF}{BC} = \frac{EP}{CP},\ \frac{CD}{FA} = \frac{CP}{AP}$$

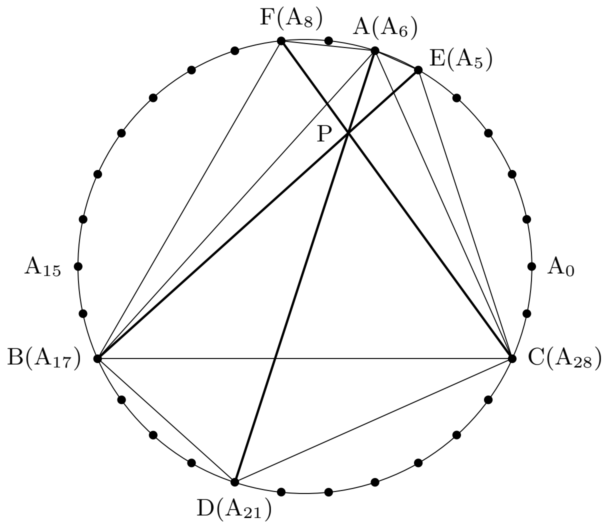
$$\therefore \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{EF}{BC} \cdot \frac{CD}{FA} = \frac{AP}{EP} \cdot \frac{EP}{CP} \cdot \frac{CP}{AP} = 1$$



6°, 12°, 42°, 54° の最大公約数が 6° だから，分割数 $= 30$
六角形 AFBDCE の対角線 AD, BD, CF は点 P で交わる。

【証明】
$\triangle ABC$ の外接円直径を 1 とすると，正弦定理より
$AF = \sin 12^\circ$, $BD = \sin 24^\circ$, $CE = \sin 42^\circ$
$FB = \sin 54^\circ$, $DC = \sin 42^\circ$, $EA = \sin 6^\circ$

$$\begin{aligned}
& FB \cdot EA - AF \cdot BD \\
&= \sin 54^\circ \sin 6^\circ - \sin 12^\circ \sin 24^\circ \\
&= \sin 54^\circ \sin 6^\circ - 2\sin 6^\circ \cos 6^\circ \sin 24^\circ \\
&= \sin 6^\circ(\sin 54^\circ - 2\cos 6^\circ \sin 24^\circ) \\
&= \sin 6^\circ\{\sin 54^\circ - (\sin 30^\circ + \sin 18^\circ)\} \\
&= \sin 6^\circ\{(3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ) - (\sin 30^\circ + \sin 18^\circ)\} \\
&= \sin 6^\circ(-\frac{1}{2} + 2\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ)
\end{aligned}$$



$\sin 18^\circ = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ を用いると，

$$-\frac{1}{2} + 2\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ = 0 \text{ を得る。}$$

$CE = DC$ より $AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot DC \cdot EA$ が成り立つ。
したがって，六角形 AFBDCE の対角線 AD, BD, CF は点 P で交わる。
$\angle PAC = \angle DAC = 7 \cdot 6^\circ = \mathbf{42^\circ}$