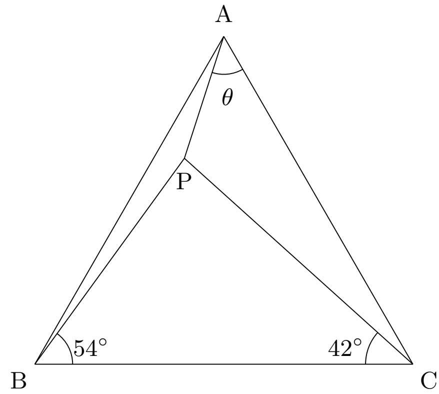
整角三角形【幾何大王からの挑戦状】問題 16 の類題

$\boxed{問}$ 正三角形 ABC の内部に点 P を

$\angle PBC = 54°,\ \angle PCB = 42°$

となるようにとるとき、$\angle PAC$ の大きさを求めよ。



【求め方 1 】

CP 上に $\angle CAQ = 18°$ となるように点 Q をとる。

ここで，点 R が直線 CP から見て点 A と反対側にくるように正三角形 AQR を作ると

$QA = QC = QR$ より点 Q は $\triangle ACR$ の外心である。

$\angle PQA = 2\angle PCA = 36°$ より

$\angle PQR = 60° - 36° = 24° \quad \cdots\cdots ①$

$\angle ACR = \dfrac{1}{2}\angle AQR = 30°,\ \angle BCR = 60° - 30° = 30°$

2 辺と夾角相等より $\triangle ACR \equiv \triangle BCR$

ゆえに $RA = RB,\ \angle RBA = \angle RAB = \angle QAC = 18°$

$\angle PBR = 18° + 6° = 24° \quad \cdots\cdots ②$

2 点 B, Q は直線 PQ に関して同じ側にあるから

①, ② より，四角形 PRBQ は円に内接する。

$RA = RQ = RB$ より点 R は $\triangle ABQ$ の外心である。

$\angle ABQ = \dfrac{1}{2}\angle ARQ = 30°$

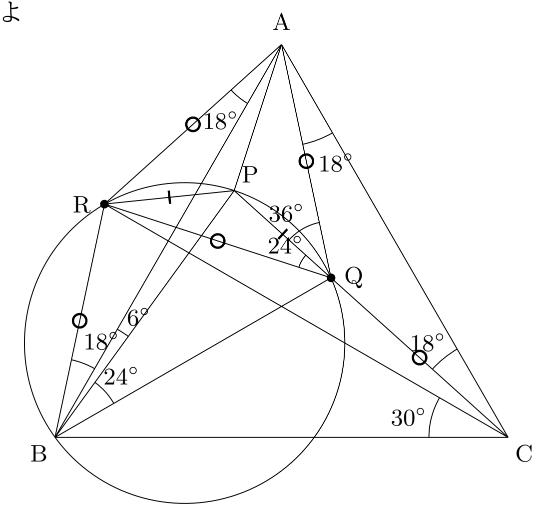
$\angle PBQ = 30° - 6° = 24° \quad \cdots\cdots ③$

②, ③ より，円周角が等しいから $PR = PQ$

3 辺相等より $\triangle APR \equiv \triangle APQ$

$\angle PAQ = \dfrac{1}{2}\angle BAQ = 30°$

$\angle PAC = 30° + 18° = \mathbf{48°}$

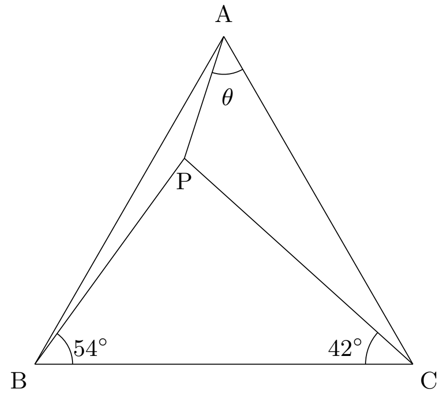


整角三角形【幾何大王からの挑戦状】問題 **16** の類題

$\boxed{問}$ 正三角形 ABC の内部に点 P を

$\angle PBC = 54^\circ,\ \angle PCB = 42^\circ$

となるようにとるとき、$\angle PAC$ の大きさを求めよ。



【求め方 2 】

CP 上に $\angle CAQ = 18^\circ$ となるように点 Q をとり，

AQ を一辺とする正三角形の頂点を R とする。

$\angle PQA = 2\angle PCA = 36^\circ$ より，$\angle PQR = 60^\circ - 36^\circ = 24^\circ$

$QC = QR$ より $\angle QCR = \dfrac{1}{2}\angle PQR = 12^\circ$

$\angle ACR = 18^\circ + 12^\circ = 30^\circ$ より $\angle BCR = 30^\circ$

2 辺と夾角相等より $\triangle ACR \equiv \triangle BCR$

$AB \perp CR$ より $\angle BRC = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$

$\angle BRQ = 72^\circ + 12^\circ = 84^\circ$

$\angle BRQ = \angle BPQ$

2 点 R, P は直線 BQ に関して同じ側にあるから

四角形 BRPQ は円に内接する。

$RB = RA = RQ$ より $\angle RBQ = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 84^\circ) = 48^\circ$

$\angle RBP = 18^\circ + 6^\circ = 24^\circ$

$\angle PBQ = \angle RBQ - \angle RBP = 48^\circ - 24^\circ = 24^\circ$

$\angle PBQ = \angle RBP$ より $PR = PQ$

3 辺相等より $\triangle APR \equiv \triangle APQ$

$\angle PAQ = \dfrac{1}{2}\angle BAQ = 30^\circ$

$\angle PAC = 30^\circ + 18^\circ = \mathbf{48^\circ}$