定積分の定理とその証明

定積分の定理

$m,\ n$ を 0 以上の整数とするとき、

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

【証明】　$I_{m,n}=\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx$ とおく。

$n=0$ のとき、

$$\begin{aligned}
I_{m,0} &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m\,dx = \left[\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}\right]_\alpha^\beta \\
&= \frac{1}{m+1}(\beta-\alpha)^{m+1} \\
&= \frac{m!}{(m+1)!}(\beta-\alpha)^{m+1}
\end{aligned}$$

であるから、確かに成り立つ。

ある n に対して成り立つとすると、

$$\begin{aligned}
I_{m,n+1} &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^{n+1}\,dx \\
&= \left[\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}(\beta-x)^{n+1}\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}\cdot(n+1)(\beta-x)^n\cdot(-1)\,dx \\
&= \frac{n+1}{m+1}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+1}(\beta-x)^n\,dx \\
&= \frac{n+1}{m+1}\cdot I_{m+1,n} \\
&= \frac{n+1}{m+1}\cdot\frac{(m+1)!\,n!}{\{(m+1)+n+1\}!}(\beta-\alpha)^{(m+1)+n+1} \\
&= \frac{m!(n+1)!}{(m+n+2)!}(\beta-\alpha)^{m+n+2}
\end{aligned}$$

となり、$n+1$ のときも成り立つ。

したがって、数学的帰納法により、定理が成り立つ。

定積分の定理

$m,\ n$ を 0 以上の整数として、$I_{m,n}=\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx$ とおく。

(1) $I_{m,0}$ の値を計算せよ。

(2) $n\geqq 1$ のとき、漸化式 $I_{m,n}=\dfrac{n}{m+1}I_{m+1,n-1}$ が成り立つことを証明せよ。

(3) 等式 $I_{m,n}=\dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ を証明せよ。

【解答】

(1)

$$\begin{aligned}
I_{m,0} &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m\,dx = \left[\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}\right]_\alpha^\beta \\
&= \frac{1}{m+1}(\beta-\alpha)^{m+1}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx \\
&= \left[\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}(\beta-x)^n\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}\cdot n(\beta-x)^{n-1}\cdot(-1)\,dx \\
&= \frac{n}{m+1}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+1}(\beta-x)^{n-1}\,dx \\
&= \frac{n}{m+1}I_{m+1,n-1}
\end{aligned}$$

(3) (2) から

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= \frac{n}{m+1}I_{m+1,n-1} = \frac{n}{m+1}\times\frac{n-1}{m+2}I_{m+2,n-2} \\
&= \frac{n}{m+1}\times\frac{n-1}{m+2}\times\cdots\times\frac{1}{m+n}I_{m+n,0} \\
&= \frac{m!\,n!}{(m+n)!}\times\frac{1}{(m+n)+1}(\beta-\alpha)^{(m+n)+1} \qquad ((1)\text{ から}) \\
&= \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}
\end{aligned}$$

定積分の定理

$p,\ q$ を 0 または正の整数とし $I_{p,q}=\int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt$ とおく。

(1) $I_{p,0}$ の値を計算せよ。

(2) $q \geqq 1$ のとき、漸化式 $I_{p,q}=\dfrac{q}{p+1}\,I_{p+1,q-1}$ が成り立つことを証明せよ。

(3) 等式 $I_{p,q}=\dfrac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$ を証明せよ。

(1997 上智大)

【解答】

(1)

$$I_{p,0}=\int_0^1 t^p\,dt=\left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{p+1}}$$

(2)

$$\begin{aligned}I_{p,q}&=\int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt\\&=\left[\frac{t^{p+1}}{p+1}(1-t)^p\right]_0^1+\int_0^1\frac{t^{p+1}}{p+1}q(1-t)^{q-1}\,dt\\&=\frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,dt=\frac{q}{p+1}\,I_{p+1,q-1}\end{aligned}$$

(3) (2) から

$$\begin{aligned}I_{p,q}&=\frac{q}{p+1}\,I_{p+1,q-1}=\frac{q}{p+1}\times\frac{q-1}{p+2}I_{p+2,q-2}\\&=\frac{q}{p+1}\times\frac{q-1}{p+2}\times\frac{q-2}{p+3}\times\cdots\times\frac{1}{p+q}I_{p+q,0}\\&=\frac{p!\,q!}{(p+q)!}\times\frac{1}{(p+q)+1}\qquad((1)\text{ から})\\&=\frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}\end{aligned}$$

(注) $\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx$ の計算は，$x-\alpha=(\beta-\alpha)t$ とおくと，

$\beta-x=(\beta-\alpha)(1-t)$　　$\begin{array}{c|ccc} x & \alpha & \to & \beta \\ \hline t & 0 & \to & 1\end{array}$ ，　$dx=(\beta-\alpha)dt$ ゆえ、

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx&=\int_0^1\{(\beta-\alpha)^m t^m\}\{(\beta-\alpha)^n(1-t)^n\}(\beta-\alpha)dt\\&=(\beta-\alpha)^{m+n+1}\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt\\&=(\beta-\alpha)^{m+n+1}\cdot\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}\\&=\boldsymbol{\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}\end{aligned}$$

定積分の定理

$m,\ n$ を正の整数とし $I_{m,n}=\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 等式 $I_{m,n}=\dfrac{n}{m+1}I_{m+1,n-1}$ を証明せよ。

(2) 等式 $I_{m,n}=I_{m-1,n}-I_{m-1,n+1}$ を証明せよ。

(3) 等式 $I_{m,n}=\dfrac{n}{m+n+1}I_{m,n-1}$ を証明せよ。

(4) 等式 $I_{m,n}=\dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$ を証明せよ。

(チャート式基礎からの数学III 試練 168)

【解答】

(1) $\begin{cases}u'=x^m\\ v=(1-x)^n\end{cases}$ とおくと $\begin{cases}u=\dfrac{x^{m+1}}{m+1}\\ v'=-n(1-x)^{n-1}\end{cases}$

$$\begin{aligned}I_{m,n}&=\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx\\&=\left[\frac{x^{m+1}}{m+1}(1-x)^n\right]_0^1+\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\,dx\\&=\frac{n}{m+1}\,I_{m+1,n-1}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}I_{m,n}&=\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx=\int_0^1 x^{m-1}\{1-(1-x)\}(1-x)^n\,dx\\&=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^n\,dx-\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n+1}\,dx\\&=I_{m-1,n}-I_{m-1,n+1}\end{aligned}$$

(3) (1), (2) より

$$\begin{aligned}I_{m,n}&=\frac{n}{m+1}\,I_{m+1,n-1}=\frac{n}{m+1}\,(I_{m,n-1}-I_{m,n})\\&=\frac{n}{m+1}I_{m,n-1}-\frac{n}{m+1}I_{m,n}\end{aligned}$$

$$\left(1+\frac{n}{m+1}\right)I_{m,n}=\frac{n}{m+1}I_{m,n-1}$$

$$\therefore\ I_{m,n}=\frac{n}{m+n+1}I_{m,n-1}$$

(4) (3) より

$$\begin{aligned}I_{m,n}&=\frac{n}{m+n+1}I_{m,n-1}=\frac{n}{m+n+1}\cdot\frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}\\&=\frac{n}{m+n+1}\cdot\frac{n-1}{m+n}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{m+2}I_{m,0}=\frac{(m+1)!\,n!}{(m+n+1)!}I_{m,0}\end{aligned}$$

$I_{m,0}=\displaystyle\int_0^1 x^m\,dx=\frac{1}{m+1}$ より

$$\therefore\ I_{m,n}=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$$