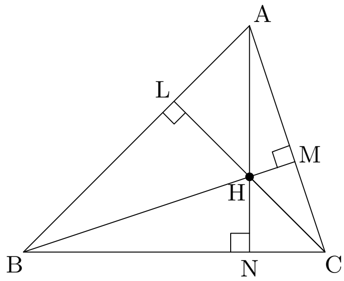
垂心の位置ベクトル　その 1



【解答 1】 辺 BC, CA, AB の長さを a, b, c で表し，頂点 C, B から対辺 (またはその延長上) に降ろした垂線の足を各々 L, M とする。
垂心を H と置くと， $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \boldsymbol{m}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \boldsymbol{n}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と書ける。

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \left(\boldsymbol{m}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \boldsymbol{n}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \boldsymbol{m}|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{n}\,\overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{AC}}$$

点 H は垂心より $\overrightarrow{\mathrm{CH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ または $\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{0}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ が成り立つ。

$\left(\overrightarrow{\mathrm{AH}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ から　　$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{AC}}$

よって，$m|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + n\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ $\cdots\cdots$① が成り立つ。
同様にして，$m\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + n|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ $\cdots\cdots$②
① から

$$c^2\,m + (bc\,\cos A)\,n = bc\,\cos A \qquad \therefore\ c\,m + (b\,\cos A)\,n = b\,\cos A\ \cdots\cdots ①'$$

同様にして ① から

$$(c\,\cos A)\,\boldsymbol{m} + b\,\boldsymbol{n} = c\,\cos A\ \cdots\cdots ②'$$

①′, ②′ の連立方程式を解く。

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} c & b\,\cos A \\ c\,\cos A & b \end{vmatrix} \\
&= bc - bc\,\cos^2 A = bc(1-\cos^2 A) = bc\,\sin^2 A\ (\fallingdotseq 0)\ \text{であるから} \\
\boldsymbol{m} &= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} b\,\cos A & b\,\cos A \\ c\,\cos A & b \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\left(b^2\,\cos A - bc\,\cos^2 A\right) \\
&= \frac{b\,\cos A(b - c\,\cos A)}{\Delta}
\end{aligned}$$

ここで，**第 1 余弦定理**より　　$b = c\,\cos A + a\,\cos C$ であるから

$\boldsymbol{b - c\,\cos A = a\,\cos C}$ が得られる。

$$m = \frac{b\,\cos A\ a\,\cos C}{bc\,\sin^2 A} = \frac{a\cos A\cos C}{c\,\sin^2 A}$$

また，**正弦定理** $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$ より　　$\dfrac{a}{c} = \dfrac{\sin A}{\sin C}$ を用いると

$$m = \frac{\sin A}{\sin C} \cdot \frac{\cos A\cos C}{\sin^2 A} = \frac{\cos A\cos C}{\sin A\sin C}$$

よって，△ABC が直角三角形でない場合は

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{\tan A\tan C} = \frac{\boldsymbol{\tan B}}{\boldsymbol{\tan A\tan B\tan C}} \qquad \text{同様にして，} \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{\tan C}}{\boldsymbol{\tan A\tan B\tan C}}$$

さらに，**加法定理**より

$$\begin{aligned}
\tan(A+B+C) &= \tan\{(A+B)+C\} = \frac{\tan(A+B)+\tan C}{1-\tan(A+B)\tan C} \\
&= \frac{\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}+\tan C}{1-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\tan C} = \frac{(\tan A+\tan B+\tan C)-\tan A\tan B\tan C}{1-(\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A)}
\end{aligned}$$

$\tan(A+B+C) = \tan 180^\circ = 0$ であるから

$\boldsymbol{\tan A\tan B\tan C = \tan A + \tan B + \tan C}$ が得られる。

すなわち　　$\boldsymbol{m} = \dfrac{\boldsymbol{\tan B}}{\boldsymbol{\tan A+\tan B+\tan C}}$, $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{\tan C}}{\boldsymbol{\tan A+\tan B+\tan C}}$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = m\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) + n\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$ より $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (\boldsymbol{1-m-n})\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boldsymbol{m}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \boldsymbol{n}\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathbf{OH}} = \frac{(\boldsymbol{\tan A})\overrightarrow{\mathbf{OA}} + (\boldsymbol{\tan B})\overrightarrow{\mathbf{OB}} + (\boldsymbol{\tan C})\overrightarrow{\mathbf{OC}}}{\boldsymbol{\tan A+\tan B+\tan C}}$$

を得る。

垂心の位置ベクトル　その 2

【解答 2 】

【解答 1 】から

$$\begin{cases} c\,\boldsymbol{m}+(b\,\cos A)\,\boldsymbol{n}=b\,\cos A & \cdots\cdots ①' \\ (c\,\cos A)\,\boldsymbol{m}+b\,\boldsymbol{n}=c\,\cos A & \cdots\cdots ②' \end{cases}$$

△ABC の外接円の半径を R とすると，**正弦定理**より　　$b=2R\,\sin B,\ c=2R\,\sin C$

$b,\ c$ を消去すると ①′ は

$$(2R\sin C)\,m+(2R\sin B\cos A)\,n=2R\sin B\cos A$$

$$\therefore\ (\,\sin C)\,\boldsymbol{m}+(\cos A\sin B)\,\boldsymbol{n}=\cos A\sin B\ \ \cdots\cdots ①''$$

同様にして，②′ から　　$(\cos A\sin C)\,\boldsymbol{m}+(\sin B)\,\boldsymbol{n}=\cos A\sin C\ \ \cdots\cdots ②''$

①″，②″ の連立方程式を解く。

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix}\sin C & \cos A\sin B \\ \cos A\sin C & \sin B\end{vmatrix} = \sin B\sin C-\cos^2 A\sin B\sin C \\ &= (1-\cos^2 A)\sin B\sin C=\sin^2 A\sin B\sin C(\fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0)\ \text{であるから} \\ \boldsymbol{m} &= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\cos A\sin B & \cos A\sin B \\ \cos A\sin C & \sin B\end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\left(\cos A\sin^2 B-\cos^2 A\sin B\sin C\right) \\ &= \frac{1}{\Delta}\cos A\sin B\,(\sin B-\cos A\sin C)\end{aligned}$$

ここで，　　$\sin B=\sin\{180^\circ-(A+C)\}=\sin(A+C)$ であり

加法定理　　$\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$ より

$\boldsymbol{\sin B-\cos A\sin C=\sin A\cos C}$ が得られる。

よって，△ABC が直角三角形でない場合は

$$\boldsymbol{m}=\frac{\cos A\sin B\sin A\cos C}{\sin^2 A\sin B\sin C}=\frac{\cos A\cos C}{\sin A\sin C}=\frac{1}{\tan A\tan C}=\boldsymbol{\frac{\tan B}{\tan A\tan B\tan C}}$$

同様にして，　$\boldsymbol{n=\dfrac{\tan C}{\tan A\tan B\tan C}}$

以下は【解答 1 】と同じで

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{(\tan A)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\tan B)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(\tan C)\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\tan A+\tan B+\tan C}}$$

を得る。