定積分の定理

$m,\ n$ を 0 以上の整数とするとき、

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

[証明]　$I_{m,n}=\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx$ とおく。

$n=0$ のとき、

$$\begin{aligned}I_{m,0}&=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m\,dx=\left[\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}\right]_{\alpha}^{\beta}\\&=\frac{1}{m+1}(\beta-\alpha)^{m+1}\\&=\frac{m!}{(m+1)!}(\beta-\alpha)^{m+1}\end{aligned}$$

であるから、確かに成り立つ。

　ある n に対して成り立つとすると、

$$\begin{aligned}I_{m,n+1}&=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^{n+1}\,dx\\&=\left[\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}(\beta-x)^{n+1}\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}\cdot(n+1)(\beta-x)^n\cdot(-1)\,dx\\&=\frac{n+1}{m+1}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+1}(\beta-x)^n\,dx\\&=\frac{n+1}{m+1}\cdot I_{m+1,n}\\&=\frac{n+1}{m+1}\cdot\frac{(m+1)!\,n!}{\{(m+1)+n+1\}!}(\beta-\alpha)^{(m+1)+n+1}\\&=\frac{m!(n+1)!}{(m+n+2)!}(\beta-\alpha)^{m+n+2}\end{aligned}$$

となり、$n+1$ のときも成り立つ。

　したがって、数学的帰納法により、定理が成り立つ。

定積分の定理

$m,\ n$ を 0 以上の整数として、$I_{m,n} = \displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx$ とおく。

(1) $I_{m,0}$ の値を計算せよ。

(2) $n \geqq 1$ のとき、漸化式 $I_{m,n} = \dfrac{n}{m+1}\,I_{m+1,n-1}$ が成り立つことを証明せよ。

(3) 等式 $I_{m,n} = \dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ を証明せよ。

[解答]

(1)

$$\begin{aligned} I_{m,0} &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m\,dx = \left[\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}\right]_\alpha^\beta \\ &= \frac{1}{m+1}(\beta-\alpha)^{m+1} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx \\ &= \left[\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}(\beta-x)^n\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}\cdot n(\beta-x)^{n-1}\cdot(-1)\,dx \\ &= \frac{n}{m+1}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+1}(\beta-x)^{n-1}\,dx \\ &= \frac{n}{m+1}\,I_{m+1,n-1} \end{aligned}$$

(3) (2) から

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \frac{n}{m+1}\,I_{m+1,n-1} = \frac{n}{m+1}\times\frac{n-1}{m+2}I_{m+2,n-2} \\ &= \frac{n}{m+1}\times\frac{n-1}{m+2}\times\cdots\times\frac{1}{m+n}I_{m+n,0} \\ &= \frac{m!\,n!}{(m+n)!}\times\frac{1}{(m+n)+1}(\beta-\alpha)^{(m+n)+1} \qquad \text{((1) から)} \\ &= \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1} \end{aligned}$$