1 の立方根と 3 次方程式の解法

$x^3=1$ の解

第 1 問　x の 3 次方程式 $x^3=1$ を解け。　(1 の立方根を求めよ。)

【解答】

1 を左辺に移項すると　$x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$　☜因数分解の公式 $\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$ から

$x-1=0$ または $x^2+x+1=0$

$x-1=0$ を解くと $x=1$　$x^2+x+1=0$ を解くと $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

よって，$\boldsymbol{x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}}$

1 の立方根

【公式】　1 の 3 乗根 (立方根) は　1，$\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ である。

1 の立方根

第 2 問　1 の立方根のうち，虚数であるものの 1 つを ω (オメガ) で表せば，他の虚数解は ω^2 であることを示せ。

【解答】

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とすると　$\omega^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2=\dfrac{1-2\sqrt{3}\,i+3\,i^2}{4}=\dfrac{-2-2\sqrt{3}\,i}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$

同様に，$\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ とすると　$\omega^2=\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2=\dfrac{-2+2\sqrt{3}\,i}{4}=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$

1 の立方根と ω

【公式】　1 の立方根は　$1,\ \omega,\ \omega^2$ である。

ω の性質

第 3 問　$\boldsymbol{\omega^3=1}$，$\boldsymbol{\omega^2+\omega+1=0}$，$x^2+x+1=(x-\omega)(x-\omega^2)$ が成り立つことを示せ。

【解答】

ω は $x^3=1$ の解であるから，　$\boldsymbol{\omega^3=1}$　が成り立つ。

ω は $x^3=1$ の虚数解の 1 つであるから　**第 1 問** より

$x^2+x+1=0$ の解である。よって，　$\boldsymbol{\omega^2+\omega+1=0}$　が成り立つ。

$\omega,\ \omega^2$ は $x^2+x+1=0$ の 2 つの解であるから，$\boldsymbol{x^2+x+1=(x-\omega)(x-\omega^2)}$ と因数分解できる。

ω と因数分解

第 4 問　ω を 1 の立方根の虚数解とすれば，$x,\ y$ の整式 x^3-y^3 は

$x^3-y^3=(x-y)(x-\omega\,y)(x-\omega^2\,y)$

と因数分解されることを示せ。

【解答】

$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

ここで，$(x-\omega\,y)(x-\omega^2\,y)=x^2-\omega^2\,xy-\omega\,xy+\omega^3\,y^2=x^2-(\omega^2+\omega)xy+\omega^3\,y^2$

第 3 問 より $\omega^2+\omega=-1,\ \omega^3=1$ であるから

$(x-\omega\,y)(x-\omega^2\,y)=x^2+xy+y^2$

よって　$x^3-y^3=(x-y)(x-\omega\,y)(x-\omega^2\,y)$ と因数分解される。

ω と因数分解

第 5 問　ω を 1 の立方根の虚数解とするとき，次の等式を証明せよ。

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=(a+\omega\,b+\omega^2\,c)(a+\omega^2\,b+\omega\,c)$

【解答】

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca&=a^2-(b+c)a+(b^2-bc+c^2)\\&=a^2+\left\{(\omega\,b+\omega^2\,c)+(\omega^2\,b+\omega\,c)\right\}a+(\omega\,b+\omega^2\,c)(\omega^2\,b+\omega\,c)\\&=(a+\omega\,b+\omega^2\,c)(a+\omega^2\,b+\omega\,c)\end{aligned}$$

ω と因数分解

【公式】　ω を 1 の立方根の虚数解とするとき，

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-3abc&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\&=(a+b+c)(a+\omega\,b+\omega^2\,c)(a+\omega^2\,b+\omega\,c)\end{aligned}$$

3 次方程式 $\boldsymbol{x^3+3px+q=0}$ の解法

第 6 問　3 次方程式 $x^3+3px+q=0$ の解は $A^3+B^3=-q,\ AB=-p$ を満たす 2 数 $A,\ B$ を用いると

$x=A+B$，$A\omega+B\omega^2$，$A\omega^2+B\omega$ であることを示せ。

【解答】

$q=(-A)^3+(-B)^3,\ p=-(-A)(-B)$ と変形して $x^3+3px+q=0$ は

$x^3+(-A)^3+(-B)^3-3x(-A)(-B)=0$ と書ける。

上の因数分解の公式を用いると

$(x-A-B)(x-A\omega-B\omega^2)(x-A\omega^2-B\omega)=0$ となる。

したがって　$\boldsymbol{x=A+B}$，$\boldsymbol{A\omega+B\omega^2}$，$\boldsymbol{A\omega^2+B\omega}$