H17 センター数学 I・A 2005/01/16　No.1

第 1 問 (必答問題)(配点 40)

〔1〕 a を定数とし，x の 2 次関数

$$y = x^2 - 2(a+2)x + a^2 - a + 1$$

のグラフを G とする。

(1) グラフ G と y 軸との交点の y 座標を Y とする。Y の値が最小になるのは $a = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ のときで，最小値は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。このときグラフ G は x 軸と異なる 2 点で交わり，その交点の x 座標は，

$$\frac{\boxed{\text{オ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{カキ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

(2) グラフ G が y 軸に関して対称になるのは $a = -\boxed{\text{ケ}}$ のときで，このときのグラフを G_1 とする。

グラフ G が x 軸に接するのは，$a = -\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ のときで，このときのグラフを G_2 とする。

グラフ G_1 を x 軸方向に $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$，$y$ 軸方向に $\boxed{\text{セソ}}$ だけ平行移動するとグラフ G_2 に重なる。

〔2〕 大小 2 個のさいころを投げ，出た目の数をそれぞれ a, b とし，2 次関数 $y = x^2 - \dfrac{b-2}{a}$ のグラフを C とする。

(1) グラフ C と x 軸との共有点の個数が 0 個である確率 (すなわちグラフ C が x 軸と共有点をもたない確率) は $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ であり，共有点の個数が 1 個である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$，共有点の個数が 2 個である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

(2) グラフ C と x 軸との共有点の個数の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

(3) グラフ C と x 軸とが共有点をもち，かつ共有点の x 座標がすべて整数となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ である。

第 2 問 (必答問題)(配点 40)

〔1〕 a, b を実数とし，x の整式

$$A = x^4 + (a^2 - a - 1)\,x^2 + (-a^2 + b)\,x + b^3$$

$$B = x^2 - x - a$$

を考える。A を B で割った商を Q，余りを R とすると，

$$Q = x^2 + x + a^{\boxed{\text{ア}}}$$

$$R = (a+b)\,x + a^{\boxed{\text{イ}}} + b^{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

(1) $R = x + 7$ のとき，$a = \boxed{\text{エ}}$ または $a = \boxed{\text{オカ}}$ である。

(2) $\boxed{\text{キ}}$ と $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，下の ⓪〜③ のうちから一つずつ選べ。

( ) $a < -\dfrac{1}{2}$ は，すべての実数 x に対して $Q > 0$ となるための $\boxed{\text{キ}}$ 。

( ) $a + b = 0$ は，A が B で割り切れるための $\boxed{\text{ク}}$ 。

⓪ 必要十分条件である
① 必要条件であるが十分条件ではない
② 十分条件であるが必要条件ではない
③ 必要条件でも十分条件でもない

〔2〕 線分 AB を直径とする半円周上に 2 点 C, D があり，

$$\mathrm{AC} = 2\sqrt{5},\ \mathrm{AD} = 8,\ \tan\angle\mathrm{CAD} = \frac{1}{2}$$

であるとする。

このとき，

$$\cos\angle\mathrm{CAD} = \frac{\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

$$\mathrm{CD} = \boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

さらに，

△ADCの面積は $\boxed{\text{セ}}$

$\mathrm{AB} = \boxed{\text{ソタ}}$

である。

第 3 問 (選択問題)(配点 20)

(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ が

$$S_n = -n^2 + 24n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で与えられるものとする。このとき，$a_1 = \boxed{\text{アイ}}$，$a_2 = \boxed{\text{ウエ}}$ である。また $a_n < 0$ となる自然数 n の範囲は $n \geqq \boxed{\text{オカ}}$ であり，

$$\sum_{k=1}^{40} |a_k| = \boxed{\text{キクケ}}$$

となる。

(2) 初項 1，公比 3 の等比数列を $\{b_k\}$ とおく。各自然数 n に対して，$b_k \leqq n$ を満たす最大の b_k を c_n とおく。例えば，$n = 5$ のとき

$$b_2 = 3,\ b_3 = 9 \text{ であり } b_1 < b_2 \leqq 5 < b_3 < b_4 \cdots\cdots$$

なので $c_5 = b_2 = 3$ である。

( ) $c_{10} = \boxed{\text{コ}}$ であり，$c_n = 27$ である自然数 n は全部で $\boxed{\text{サシ}}$ 個である。

( ) $\sum_{k=1}^{30} c_k = \boxed{\text{スセソ}}$ である。

第 4 問 (選択問題)(配点 20)

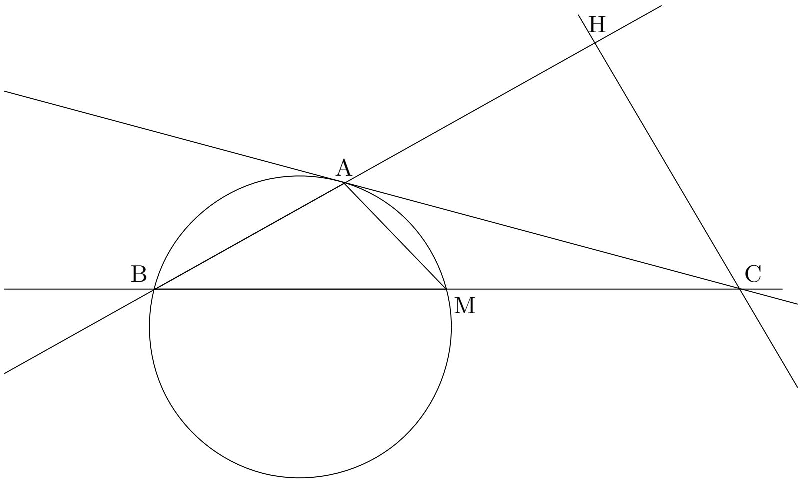
△ABC において，∠A は鈍角で，∠B = 30° である。点 C から直線 AB に引いた垂線と直線 AB との交点を H とする。辺 BC の中点を M とし，直線 AC は 3 点 A, B, M を通る円と点 A で接しているとする。

下の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ については，最も適当なものを次の ⓪ ～ Ⓕ のうちから一つずつ選べ。

⓪ 鋭角三角形　① 直角二等辺三角形　② 二等辺三角形
③ 正三角形　④ 直角三角形

⑤ ABC　⑥ AMB　⑦ HMC
⑧ MAB　⑨ MCA

Ⓐ AB　Ⓑ AC　Ⓒ AM
Ⓓ BC　Ⓔ BH　Ⓕ CH



直角三角形 HBC において ∠HBC = 30° なので，BC = 2 $\boxed{\text{ア}}$ である。一方 ∠MAC = ∠ $\boxed{\text{イ}}$ なので，△MAC と △ $\boxed{\text{イ}}$ は相似になる。したがって

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{MC} \cdot \boxed{\text{ウ}}$$

となる。M は辺 BC の中点なので

$$\mathrm{AC} = \sqrt{\boxed{\text{エ}}}\,\mathrm{CH}$$

が成り立つ。したがって △HAC は $\boxed{\text{オ}}$ であり，∠AMB = $\boxed{\text{カキ}}$° となる。

AC と HM の交点を K，直線 BK と HC の交点を L とする。△HBK と △BCK の面積比は HL : LC であり，△CHK と △BCK の面積比は

$$\triangle\mathrm{CHK} : \triangle\mathrm{BCK} = \mathrm{HA} : \boxed{\text{ク}}$$

である。また，M は辺 BC の中点だから，△HBK と △CHK の面積は等しい。

ゆえに，HL : LC = HA : $\boxed{\text{ク}}$ が成り立つ。

したがって △HAL と △HBC の面積比は

$$\triangle\mathrm{HAL} : \triangle\mathrm{HBC} = 1 : \boxed{\text{ケ}}$$

となる。

第 5 問 (選択問題)(配点 20)

次のプログラムを考える。ただし，N には自然数を入力するものとする。また，INT(X) は X を超えない最大整数を与える関数である。

```
100 INPUT "N=";N
110 IF N>9 THEN GOTO 230
120 FOR A=1 TO N
130   FOR B=1 TO N
140    IF B=2*INT(B/2) THEN GOTO 210
150    IF B=A THEN GOTO 210
160      FOR C=1 TO N
170       IF C=A THEN GOTO 200
180       IF C=B THEN GOTO 200
190       PRINT 100*A+10*B+C
200      NEXT C
210   NEXT B
220 NEXT A
230 END
```

(1) 上のプログラムを実行し，N =? に 3 を入力すると，3 桁(けた)の数が $\boxed{\text{ア}}$ 個表示される。特に，2 番目に表示される 3 桁の数は $\boxed{\text{イウエ}}$ である。

(2) 上のプログラムを実行し，N =? に 5 を入力すると，150 行は $\boxed{\text{オカ}}$ 回実行され，$\boxed{\text{イウエ}}$ は $\boxed{\text{キ}}$ 番目に表示される。

(3) 上のプログラムの 160 行と 180 行は，それぞれ次のように書き直す。

```
160   FOR C=B TO N

180    IF C=B*INT(C/B) THEN GOTO 200
```

変更したこのプログラムを実行し，N =? に 7 を入力する。このとき，表示される 3 桁の数のうち，最大の数は $\boxed{\text{クケコ}}$ であり，300 以上 500 以下の数は $\boxed{\text{サ}}$ 個である。