H17 センター数学II・B 2005/01/16　No.1

第1問　(必答問題)(配点 30)

〔1〕 座標平面上の 3 点

$$\mathrm{A}(-1,\ 0),\ \mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta),\ \mathrm{C}(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$$

について，θ が $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲を動くとき

$$d = \mathrm{AC} + \mathrm{BC}$$

の最大値と最小値を求めよう。

(1)

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= \boxed{\text{ア}} + 2\cos 2\theta \\ &= \boxed{\text{イ}}\cos^2\theta \\ \mathrm{BC}^2 &= \boxed{\text{ウ}} - 2\cos\theta \\ &= \boxed{\text{エ}}\sin^2\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

であるから

$$d = \boxed{\text{オ}}\,|\cos\theta| + \boxed{\text{カ}}\sin\frac{\theta}{2}$$

である。

(2) $t = \sin\dfrac{\theta}{2}$ とおく。

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であり，$d = -\boxed{\text{ケ}}\,t^2 + \boxed{\text{コ}}\,t + 2$

である。

$90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき

$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}} \leqq t \leqq$ であり，$d = \boxed{\text{ケ}}\,t^2 + \boxed{\text{コ}}\,t - 2$ である。

したがって，d は $t = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ をとり，このときの θ の値は $\boxed{\text{セソ}}^\circ$ である。また，d は $t = \boxed{\text{タ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{チ}}$ をとり，このときの θ の値は $\boxed{\text{ツテト}}^\circ$ である。

〔2〕 $x,\ y,\ z$ は正の整数で $2^x = \left(\dfrac{5}{2}\right)^y = 3^z$ を満たしている。このとき

$$a = 2x,\ b = \frac{5}{2}y,\ c = 3z$$

とおき，$a,\ b,\ c$ の大小関係を調べてみよう。

(1) $x = y\left(\log_2 \boxed{\text{ナ}} - \boxed{\text{ニ}}\right)$ であるから

$$b - a = y\left(\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{2} - 2\log_2 \boxed{\text{ナ}}\right)$$

である。 したがって a と b を比べると $\boxed{\text{ネ}}$ の方が大きい。

(2) $x = z\log_2 \boxed{\text{ノ}}$ であるから

$$c - a = z\left(3 - 2\log_2 \boxed{\text{ノ}}\right)$$

である。したがって a と c を比べると $\boxed{\text{ハ}}$ の方が大きい。

(3) $3^5 < \left(\dfrac{5}{2}\right)^6$ であることを用いると，$a,\ b,\ c$ の間には大小関係

$$\boxed{\text{ヒ}} < \boxed{\text{フ}} < \boxed{\text{ヘ}}$$

が成り立つことがわかる。

第2問　(必答問題)(配点 30)

(1) a を定数とし，放物線

$$y = x^2 + 2ax - a^3 - 2a^2$$

を C，その頂点を P とする。

(1) 頂点 P の座標は

$$\left(\boxed{\text{アイ}},\ -a^{\boxed{\text{ウ}}} - \boxed{\text{エ}}\,a^2\right)$$

である。したがって，どのような定数 a についても，頂点 P は

$$y = x^{\boxed{\text{オ}}} - \boxed{\text{カ}}\,x^2$$

のグラフ上にある。

(2) a が $-3 \leqq a < 1$ の範囲を動くとする。頂点 P の y 座標の値が最大となるのは $a = \boxed{\text{キ}}$ と $a = \boxed{\text{クケ}}$ のときであり，最小となるのは $a = \boxed{\text{コサ}}$ のときである。

(3) a の値は (2) で求めた $\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{クケ}}$, $\boxed{\text{コサ}}$ とするときの放物線 C をそれぞれ $C_1,\ C_2,\ C_3$ とする。放物線 $C_2,\ C_3$ の方程式は

$$C_2 : y = x^2 - \boxed{\text{シ}}\,x + \boxed{\text{ス}}$$

$$C_3 : y = x^2 - \boxed{\text{セ}}\,x$$

である。

このとき

C_1 と C_2 の交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{2}$

C_1 と C_3 の交点の x 座標は $\boxed{\text{タ}}$

C_2 と C_3 の交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{2}$

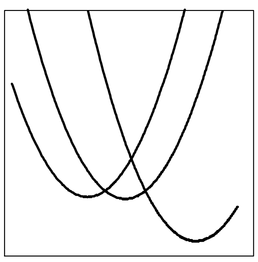
である。

(4) $C_1,\ C_2,\ C_3$ を座標平面上に図示したとき，それらの位置関係を表す最も適当なものは，下の図 ⓪ ～ ③ のうち $\boxed{\text{ツ}}$ である。ただし，座標軸や曲線名は省略してある。

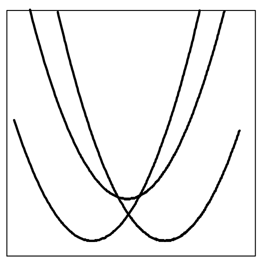
三つの放物線 $C_1,\ C_2,\ C_3$ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$

である。

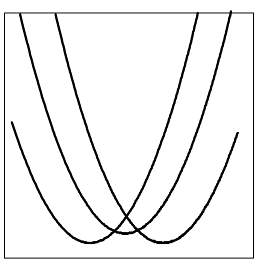
⓪



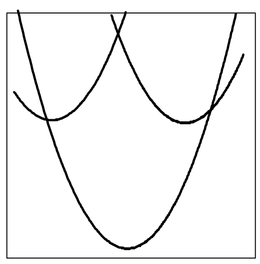
①



②



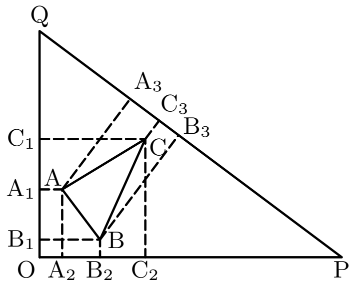
③



第3問 (選択問題)(配点 20)

座標平面上の 3 点 O(0, 0), P(4, 0), Q(0, 3) を頂点とする三角形 OPQ の内部に三角形 ABC があるとする。A, B, C から直線 OQ に引いた垂線と OQ との交点をそれぞれ A_1, B_1, C_1 とする。A, B, C から直線 OP に引いた垂線と OP との交点をそれぞれ A_2, B_2, C_2 とする。A, B, C から直線 PQ に引いた垂線と PQ との交点をそれぞれ A_3, B_3, C_3 とする。

A_1 が線分 B_1C_1 の中点であり，B_2 が線分 A_2C_2 の中点であり，C_3 が線分 A_3B_3 の中点であるとする。



$\overrightarrow{AB}=(x,\ y)$, $\overrightarrow{AC}=(z,\ w)$ とおく。A_1 が線分 B_1C_1 の中点であるから $w=\boxed{\text{ア}}\,y$ である。B_2 が線分 A_2C_2 の中点であるから $z=\boxed{\text{イ}}\,x$ である。線分 AB の中点を D とすると，C_3 が線分 A_3B_3 の中点であるから

$$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PQ}=\boxed{\text{ウ}}$$

である。また

$$\overrightarrow{PQ}=\left(\boxed{\text{エオ}},\ \boxed{\text{カ}}\right),$$

$$\overrightarrow{CD}=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\left(\overrightarrow{AB}-\boxed{\text{ケ}}\,\overrightarrow{AC}\right)$$

であるから

$$y=\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}\,x$$

である。したがって

$$\overrightarrow{AB}=x\left(1,\ \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}\right),\ \overrightarrow{AC}=x\left(\boxed{\text{イ}},\ \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\right)$$

である。ゆえに

$$AC=\frac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}AB,\ \cos\angle BAC=\frac{\sqrt{\boxed{\text{テト}}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$$

である。

第4問 (選択問題)(配点 20)

二つの複素数 p, q と三つの異なる複素数 α, β, γ は

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

$$\alpha\beta\gamma=q \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

を満たすとする。複素数 α, β, γ が複素数平面上で表す点をそれぞれ A, B, C とし，三角形 ABC は，AB = AC の直角二等辺三角形であるとする。

このとき

$$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\boxed{\text{アイ}}^\circ,\ \left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\boxed{\text{ウ}}$$

である。ここで，複素数 z の偏角 $\arg z$ は $-180^\circ\leqq\arg z<180^\circ$ を満たすとする。

以下 $\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\boxed{\text{アイ}}^\circ$ であるとする。このとき，① を用いると

$$\beta=\frac{\boxed{\text{エオ}}+\boxed{\text{カ}}\,i}{\boxed{\text{キ}}}\alpha,\ \gamma=\frac{\boxed{\text{クケ}}-\boxed{\text{コ}}\,i}{\boxed{\text{サ}}}\alpha$$

である。

さらに，②, ③ から

$$p=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\alpha^{\boxed{\text{セ}}},\ q=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\alpha^{\boxed{\text{チ}}}$$

である。したがって，p と q は

$$\boxed{\text{ツテ}}\,p^{\boxed{\text{ト}}}=\boxed{\text{ナニ}}\,q^{\boxed{\text{ヌ}}}$$

を満たさなければならない。

さらに，複素平面上に点 D があり，四角形 ABDC が正方形であるとき，D を表す複素数は $\boxed{\text{ネノ}}\,\alpha$ である。

第５問 (選択問題)(配点 20)

さいころを最大 5 回まで投げ，目の出方に応じてポイントを得る次のゲームを D さんがおこなう。D さんは最初 a ポイントをもっている。

さいころを投げて，5 または 6 の目が出る事象を A とする。事象 A が初めて起こった時点では 1 ポイントを得て引き続きゲームを続行し，2 度目に事象 A が起これば 2 ポイントが加算されて合計 3 ポイントを得て，その時点でゲームを終了する。なお，さいころを 5 回投げても，事象 A が一度しか起こらない場合には，1 度目に得た 1 ポイントのままで終了する。もし 5 回投げても事象 A が一度も起こらない場合には，あらかじめ定めた m ポイントが減点されて終了する。ただし，a と m は自然数で，$a \geqq m$ とする。

このゲームが終了した時点での D さんのもつポイント数を確率変数 X とする。

(1) $X = a+1$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{243}$ である。

(2) ちょうど 4 回目でゲームが終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ であり，終了する時点が 4 回目または 5 回目となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

(3) 3 回目までに一度も事象 A が起こらない確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

また，3 回目までに一度も事象 A が起こらないとき，$X > a$ となる条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

(4) 確率変数 X の平均 (期待値) は

$$E(X) = a + \frac{\boxed{\text{ソタチ}} - \boxed{\text{ツテ}}\,m}{243}$$

で，$E(X) > a$ となるような最大の自然数 m は $\boxed{\text{トナ}}$ である。

第６問 (選択問題)(配点 20)

ある銀行では毎期末に預金残高に対し 5 % の利率で利息がつく。この銀行に，たとえば a 万円を一期間預金すると，期末には $1.05 \times a$ 万円の預金残高になることになる。

第 1 期の初めに，A さんはこの銀行に b 万円の預金を持っている。A さんは，まず b 万円から第 1 期分 m 万円を引き出す。残りの預金に対し第 1 期末に 5 % の利息がつく。ここで，$b > m$ とする。第 2 期目からも毎期初めにこの預金から m 万円ずつ引き出す予定である。ただし，預金残高が m 万円に満たないときは，その金額を引き出すものとする。

以下の問題中，INT(X) は X を超えない最大の整数を表す関数である。

(1) 預金残高が 0 円になるのは何期間を要するかを調べるため，次の〔プログラム 1〕を作った。このプログラムでは，自然数 b と m を与えるとき，第 n 期初めに預金を引き出した直後に預金残高が 0 円になれば，そのときの自然数 n を出力する。

〔プログラム 1〕

```
100 INPUT "B=";B
110 INPUT "M=";M
120 N=0
130 N=N+1
140 B=1.05*(B-M)
150 IF B>0 THEN GOTO [アイウ]
160 PRINT N
170 END
```

このプログラムの空欄 $\boxed{\text{アイウ}}$ をつめて，プログラムを完成せよ。

(2) このプログラムの 160 行を変更して，最終期の引き出し金額の 1 万円未満を切り捨てたものも出力するようにするには，160 行を $\boxed{\text{エ}}$ と変更すればよい。ただし，この金額の単位は万円とする。 また，$\boxed{\text{エ}}$ については，当てはまるものを，次の ⓪～⑤ から一つ選べ。

⓪ PRINT N, INT(B)　　① PRINT N, INT(B + M)
② PRINT N, INT(B − M)　　③ PRINT N, INT(1.05 ∗ B)
④ PRINT N, INT(B/1.05 + M)　　⑤ PRINT N, INT(B/1.05 − M)

(3) 第 1 期初めの預金額を 2150 万円，引き出し額を 100 万円とすると，第 1 期末の預金残高は，約 2152 万円となり，第 1 期初めの 2150 万円より増える。

一般に，毎月の初めに m 万円引き出すものとし，第 n 期末の預金残高を c_n 万円とする。このとき，$c_{n+1} = 1.05(c_n - m)$ であるので

$$c_{n+1} - c_n = 1.05(c_n - c_{n-1}),\ n = 1,\ 2,\ \cdots$$

が成り立つ。ただし，$c_0 = 2150$ とする。

よって，$c_1 - c_0 \geqq 0$ ならば，預金残高は減少しないことがわかる。ここで，c_1 は m と c_0 によって決まり，$c_1 - c_0 \geqq 0$ を満たす最大の自然数 m は $\boxed{\text{オカキ}}$

(4) 次に，A さんの預金残高が n 期間にわたり 0 円にならないために必要な第 1 期初めの預金額 b 万円を計算するため，次の〔プログラム 2〕を作った。このプログラムでは，自然数 n と m を与えるとき，預金残高が n 期間にわたり 0 円にならないために必要な第 1 期初めの預金額 b 万円き計算する。ただし，$n \geqq 2$ とする。

〔プログラム 2〕

```
100 INPUT "N=";N
110 INPUT "M=";M
120 I=N
130 B=M
140 B=B/1.05+M
150 I=I-1
160 IF I>1 THEN GOTO [クケコ]
170 PRINT [サ]
180 END
```

このプログラムの空欄 $\boxed{\text{クケコ}}$ と $\boxed{\text{サ}}$ をうめて，このプログラムを完成せよ。ただし，$\boxed{\text{サ}}$ については，当てはまるものを，次の ⓪～④ から一つ選べ。

⓪ INT(B)　　① INT(B/1.05)　　② INT(B/1.05 + 1)
③ INT(B + 1)　　④ INT((B + 1)/1.05)

このプログラムを実行して N=? に対し 3，M=? に対し 90 を入力したとき，170 行において $\boxed{\text{シスセ}}$ と出力される。このとき，140 行は $\boxed{\text{ソ}}$ 回実行される。