H19 センター数学I・A 2007/01/21　No.1

第1問 (必答問題)(配点 20)

〔1〕 方程式

$$2(x-2)^2 = |3x-5| \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える。

(1) 方程式 ① の解のうち，$x < \dfrac{5}{3}$ を満たす解は

$$x = \boxed{ア},\ \frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$$

である。

(2) 方程式 ① の解は全部で $\boxed{エ}$ 個ある。その解のうちで最大のものを α とすると，$m \leqq \alpha < m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{オ}$ である。

〔2〕 集合 A, B を

$A = \{n \mid n$ は 10 で割り切れる自然数$\}$

$B = \{n \mid n$ は 4 で割り切れる自然数$\}$

とする。

(1) 次の $\boxed{カ}$ と $\boxed{キ}$ に当てはまるものを，下の ⓪ 〜③ のうちから一つずつ選べ。

自然数 n が A に属することは，n が 2 で割り切れるための $\boxed{カ}$。

自然数 n が B に属することは，n が 20 で割り切れるための $\boxed{キ}$。

⓪ 必要十分条件である
① 必要条件であるが十分条件ではない
② 十分条件であるが必要条件ではない
③ 必要条件でも十分条件でもない

(2) 次の $\boxed{ク}$ 〜 $\boxed{コ}$ に当てはまるものを，下の ⓪ 〜⑦ のうちから一つずつ選べ。

$C = \{n \mid n$ は 10 と 4 のいずれでも割り切れる自然数$\}$

$D = \{n \mid n$ は 10 でも 4 でも割り切れない自然数$\}$

$E = \{n \mid n$ は 20 で割り切れない自然数$\}$

とする。自然数全体の集合を全体集合とし，その部分集合 G の補集合を $\overline{G}$ で表すとき

$$C = \boxed{ク},\ D = \boxed{ケ},\ E = \boxed{コ}$$

である。

⓪ $A \cup B$　① $A \cup \overline{B}$　② $\overline{A} \cup B$　③ $\overline{A \cup B}$
④ $A \cap B$　⑤ $A \cap \overline{B}$　⑥ $\overline{A} \cap B$　⑦ $\overline{A \cap B}$

第2問 (必答問題)(配点 25)

a を定数とし，x の 2 次関数

$$y = x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 8a + 4 \qquad \cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする。

(1) グラフ G が表す放物線の頂点の座標は

$$\left(a - \boxed{ア},\ a^2 - \boxed{イ}\,a + \boxed{ウ}\right)$$

である。グラフ G が x 軸と異なる 2 点で交わるのは

$$\boxed{エ} - \sqrt{\boxed{オ}} < a < \boxed{エ} + \sqrt{\boxed{オ}}$$

のときである。さらに，この二つの交点がともに x 軸の負の部分にあるのは

$$\boxed{カ} - \sqrt{\boxed{キ}} < a < \boxed{ク} - \sqrt{\boxed{ケ}}$$

のときである。

(2) グラフ G が表す放物線の頂点の x 座標が 3 以上 7 以下の範囲にあるとする。

このとき，a の値の範囲は

$$\boxed{コ} \leqq a \leqq \boxed{サ}$$

であり，2 次関数 ① の $3 \leqq x \leqq 7$ における最大値 M は

$\boxed{コ} \leqq a \leqq \boxed{シ}$ のとき

$$M = \boxed{ス}\,a^2 - \boxed{セソ}\,a + \boxed{タチ}$$

$\boxed{シ} \leqq a \leqq \boxed{サ}$ のとき

$$M = \boxed{ツ}\,a^2 - \boxed{テト}\,a + \boxed{ナニ}$$

である。

したがって，2 次関数 ① の $3 \leqq x \leqq 7$ における最小値が 6 であるならば

$$a = \boxed{ヌ} + \boxed{ネ}\sqrt{\boxed{ノ}}$$

であり，最大値 M は

$$M = \boxed{ハヒ} - \boxed{フ}\sqrt{\boxed{ヘ}}$$

である。

第 3 問 (必答問題)(配点 30)

△ABC において，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{BC}=\sqrt{5}+1$，$\mathrm{CA}=2\sqrt{2}$ とする。また，△ABC の外接円の中心を O とする。

(1) このとき，$\angle\mathrm{ABC}=\boxed{\text{アイ}}^\circ$ であり，外接円 O の半径は

$$\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

である。

(2) 円 O の円周上に点 D を，直線 AC に関して点 B と反対側の弧の上にとる。△ABD の面積を S_1，△BCD の面積を S_2 とするとき

$$\frac{S_1}{S_2}=\sqrt{5}-1 \qquad \cdots\cdots ①$$

であるとする。$\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{BCD}=\boxed{\text{カキク}}^\circ$ であるから

$$\mathrm{CD}=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\mathrm{AD}$$

となる。このとき

$$\mathrm{CD}=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}$$

である。

さらに，2 辺 AD, BC の延長の交点を E とし，△ABE の面積を S_3，△CDE の面積を S_4 とする。このとき

$$\frac{S_3}{S_4}=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \qquad \cdots\cdots ②$$

である。① と ② より

$$\frac{S_2}{S_4}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

となる。

第 4 問 (必答問題)(配点 25)

1 辺の長さ 1 の正六角形があり，その頂点の一つを A とする。一つのさいころを 3 回投げ，点 P を次の (a), (b), (c) にしたがって，この正六角形の辺上を反時計回りに進める。

(a) 頂点 A から出発して，1 回目に出た目の数の長さだけ点 P を進める。

(b) 1 回目で点 P がとまった位置から出発して，2 回目に出た目の数の長さだけ点 P を進める。

(c) 2 回目で点 P がとまった位置から出発して，3 回目に出た目の数の長さだけ点 P を進める。

(1) 3 回進めたとき，点 P が正六角形の辺上を 1 周して，ちょうど頂点 A に到達する目の出方は $\boxed{\text{アイ}}$ 通りである。

3 回進める間に，点 P が 1 回も頂点 A にとまらないしい目の出方は $\boxed{\text{ウエオ}}$ 通りである。

(2) 3 回進める間に，点 P が 3 回とも頂点 A にとまる確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キクケ}}}$ であり，ちょうど 2 回だけ頂点 A にとまる確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

3 回進める間に，点 P がちょうど 1 回だけ頂点 A にとまる確率は $\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である。

(3) 3 回進める間に，点 P が頂点 A にとまる回数の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ 回である。

H19 センター数学I・A 2007/01/21 正解・配点

第1問

解答記号	正　　解	配点
$\boxed{\text{ア}}$	$\boxed{1}$	2
$\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$	$\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$	2
$\boxed{\text{エ}}$	$\boxed{4}$	2
$\boxed{\text{オ}}$	$\boxed{3}$	4
$\boxed{\text{カ}}$	$\boxed{2}$	2
$\boxed{\text{キ}}$	$\boxed{1}$	2
$\boxed{\text{ク}}$	$\boxed{4}$	2
$\boxed{\text{ケ}}$	$\boxed{3}$	2
$\boxed{\text{コ}}$	$\boxed{7}$	2
		第1問 (20点)

第2問

解答記号	正　　解	配点
$\left(a-\boxed{\text{ア}},\ a^2-\boxed{\text{イ}}a+\boxed{\text{ウ}}\right)$	$\left(a-\boxed{1},\ a^2-\boxed{6}a+\boxed{3}\right)$	3
$\boxed{\text{エ}}-\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$	$\boxed{3}-\sqrt{\boxed{6}}$	2
$\boxed{\text{カ}}-\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$	$\boxed{3}-\sqrt{\boxed{6}}$	1
$\boxed{\text{ク}}-\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$	$\boxed{2}-\sqrt{\boxed{2}}$	3
$\boxed{\text{コ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{サ}}$	$\boxed{4} \leqq a \leqq \boxed{8}$	2
$\boxed{\text{シ}}$	$\boxed{6}$	2
$\boxed{\text{ス}}a^2-\boxed{\text{セソ}}a+\boxed{\text{タチ}}$	$\boxed{2}a^2-\boxed{22}a+\boxed{67}$	3
$\boxed{\text{ツ}}a^2-\boxed{\text{テト}}a+\boxed{\text{ナニ}}$	$\boxed{2}a^2-\boxed{14}a+\boxed{19}$	3
$\boxed{\text{ヌ}}+\boxed{\text{ネ}}\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$	$\boxed{3}+\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}$	3
$\boxed{\text{ハヒ}}-\boxed{\text{フ}}\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}$	$\boxed{19}-\boxed{4}\sqrt{\boxed{3}}$	3
		第2問 (25点)

第3問

解答記号	正　　解	配点
$\boxed{\text{アイ}}^\circ$	$\boxed{60}^\circ$	3
$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$	$\dfrac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\sqrt{\boxed{6}}$	5
$\boxed{\text{カキク}}^\circ$	$\boxed{180}^\circ$	3
$\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\mathrm{AD}$	$\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\mathrm{AD}$	5
$\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}$	$\dfrac{\boxed{2}}{\boxed{7}}\sqrt{\boxed{14}}$	4
$\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$	$\dfrac{\boxed{7}}{\boxed{2}}$	5
$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$	$\dfrac{\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$	5
		第3問 (30点)

第4問

解答記号	正　　解	配点
$\boxed{\text{アイ}}$	$\boxed{10}$	4
$\boxed{\text{ウエオ}}$	$\boxed{125}$	4
$\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キクケ}}}$	$\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{216}}$	4
$\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$	$\dfrac{\boxed{5}}{\boxed{72}}$	4
$\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$	$\dfrac{\boxed{25}}{\boxed{72}}$	4
$\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$	$\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$	5
		第4問 (25点)