例題 1

方程式 $x^3+3x^2-1=0$ の 3 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とするとき、$\alpha^2,\ \beta^2,\ \gamma^2$ を 3 つの解とする 3 次方程式を求めよ。 [1984 近畿大・商 (大学への数学 $5-84$ $p4$)]

—解答例—

$$\alpha^3+3\alpha^2-1=0 \qquad \therefore\ \alpha^3=1-3\alpha^2$$

両辺を 2 乗して $(\alpha^3)^2=(1-3\alpha^2)^2$
よって $(\alpha^2)^3=(1-3\alpha^2)^2$ が成り立つから、α^2 は方程式

$$x^3=(1-3x)^2\cdots\cdots①$$

の解であり、同様に、$\beta^2,\ \gamma^2$ も ① の解である。
　よって、求める方程式は、① すなわち

$$x^3-9x^2+6x-1=0 \qquad \boxed{答}$$

問題

α は $x^3-x-1=0$ の解であるとき、α^2 を解とする整数係数の 3 次方程式をひとつ求めよ。
[1996 第 6 回 日本数学オリンピック 予選 第 4 問]

例題 2

$\alpha^5=1,\ \alpha \fallingdotseq 1$ のとき $(\alpha+\alpha^4)(\alpha^2+\alpha^3),\ \alpha^2+\alpha^3$ の値を求めよ。

[1984 東京歯科大 (大学への数学 $5-84$ $p4$)]

—解答例—

$$\alpha^5-1=(\alpha-1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0,\ \alpha \fallingdotseq 1$$

により、$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$ であるから、

$$\begin{aligned}(\alpha+\alpha^4)(\alpha^2+\alpha^3) &= \alpha^3+\alpha^4+\alpha^6+\alpha^7\\ &= \alpha^3+\alpha^4+\alpha+\alpha^2 \qquad (\because\ \alpha^5=1)\\ &= -1\end{aligned}$$

また、$(\alpha+\alpha^4)+(\alpha^2+\alpha^3)=-1$
したがって、$\alpha+\alpha^4$ と $\alpha^2+\alpha^3$ は、2 次方程式

$$x^2+x-1=0$$

の 2 解であるから、$\alpha^2+\alpha^3=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 　　$\boxed{\text{答}}$