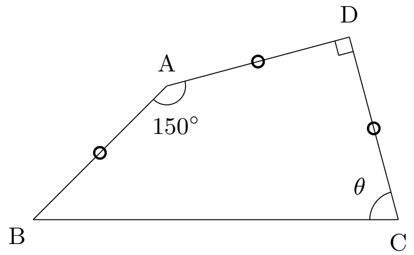
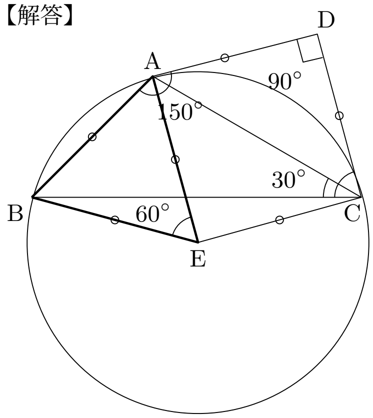
【四角形の角 1】

$\boxed{\text{問}}$ 四角形 ABCD で $\angle\mathrm{BCD}$ を求めよ。
1994 年算数オリンピック・予選・問題 8 より



【解答】



AB を 1 辺とする正三角形 ABE を図のように作ると，

$$\angle\mathrm{EAD} = \angle\mathrm{BAD} - \angle\mathrm{BAE} = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$$

また，$\mathrm{AB} = \mathrm{AD} = \mathrm{AE}$ であるから，四角形 AECD は正方形である。
よって，$\mathrm{EB} = \mathrm{EA} = \mathrm{EC}$ が成り立つから，点 E は $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心である。
中心角と円周角の関係より

$$\angle\mathrm{BCA} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{BEA} = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

$$\angle\mathrm{BCD} = \angle\mathrm{BCA} + \angle\mathrm{DCA} = 30^\circ + 45^\circ = \mathbf{75^\circ}$$

$\boxed{\text{別 1}}$ 正方形 ADCE を図のように作ると，

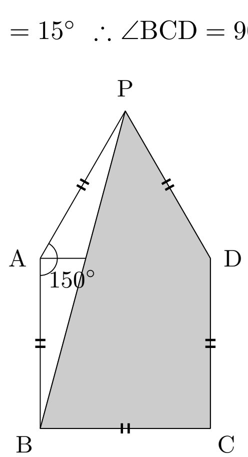
$$\angle\mathrm{EAD} = \angle\mathrm{BAD} - \angle\mathrm{EAD} = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$$

また，$\mathrm{AB} = \mathrm{AE}$ であるから，三角形 ABE は正三角形 である。
よって，$\mathrm{EB} = \mathrm{EA} = \mathrm{EC}$ が成り立つから，点 E は $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心である。

$\boxed{\text{別 2}}$ 正方形 ADCE を図のように作ると，$\triangle\mathrm{BEC}$ は二等辺三角形である。
$\angle\mathrm{BEC} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$ より $\angle\mathrm{BCE} = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ$ $\therefore \angle\mathrm{BCD} = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$

$\boxed{\text{原図}}$ 正方形 ABCD と正三角形 ADP を組み合わせると

四角形 PDCB が条件を満たす。



【四角形の角 2】

問 次の角 $\alpha,\ \beta$ をそれぞれ求めよ。
算数オリンピック より

図 1

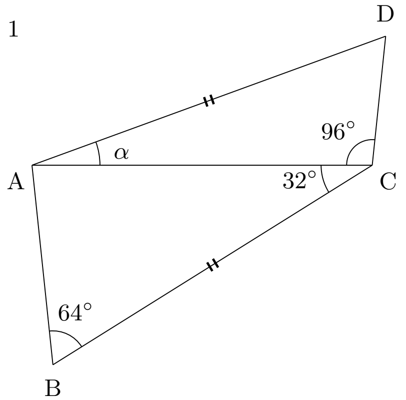
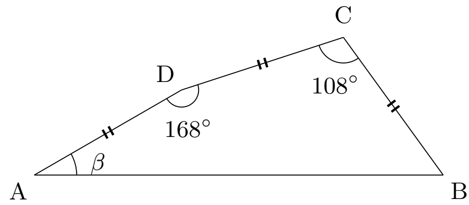


図 2



【解答】

図 1

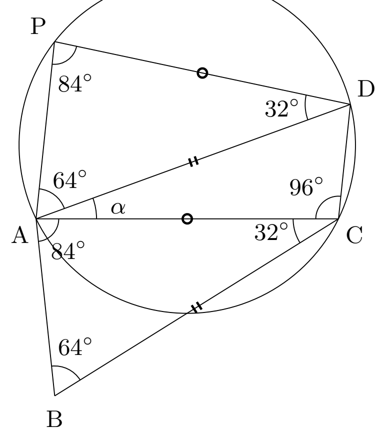


図 1 において，$\mathrm{AD} = \mathrm{BC}$ であるから 三角形 ABC と合同な三角形 PAD を作る。

$\angle\mathrm{APD} = \angle\mathrm{BAC} = 180^\circ - (64^\circ + 32^\circ) = 84^\circ$

よって，$\angle\mathrm{APD} + \angle\mathrm{ACD} = 84^\circ + 96^\circ = 180^\circ$

が成り立つから四角形 ACDP は円に内接する。

$\mathrm{AC} = \mathrm{PD}$ より $\overset{\frown}{\mathrm{AC}} = \overset{\frown}{\mathrm{PD}}$

よって，$\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{PAD} = 64^\circ$

$\therefore\ \alpha = 180^\circ - (96^\circ + 64^\circ) = 20^\circ$ 答

図 2

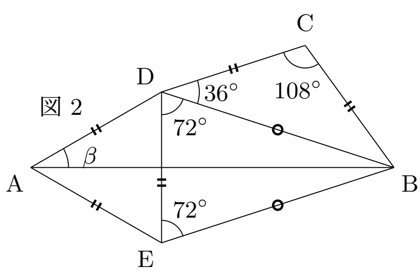


図 2 において，AD を 1 辺とする正三角形 ADE を図のように作る。

$\angle\mathrm{EDC} = \angle\mathrm{ADC} - \angle\mathrm{ADE} = 168^\circ - 60^\circ = 108^\circ$ より $\angle\mathrm{EDC} = \angle\mathrm{BCD}$

また $\mathrm{ED} = \mathrm{AD} = \mathrm{DC} = \mathrm{CB}$ であるから，

四角形 EDCB は $\mathrm{DC} \mathbin{/\!/} \mathrm{EB}$ の**等脚台形**である。

よって，$\angle\mathrm{DEB} = 180^\circ - \angle\mathrm{EDC} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ ……①

また，$\angle\mathrm{CDB} = \dfrac{1}{2}(180^\circ - \angle\mathrm{DCB}) = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ$ より

$\angle\mathrm{EDB} = \angle\mathrm{EDC} - \angle\mathrm{CDB} = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$ ……②

①, ② より $\triangle\mathrm{BDE}$ は $\mathrm{DB} = \mathrm{EB}$ の二等辺三角形である。

AB が共通であるから $\triangle\mathrm{ADB} \equiv \triangle\mathrm{AEB}$

よって，$\beta = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{DAE} = \dfrac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$ 答

別 $\mathrm{AD} = \mathrm{AE},\ \mathrm{BD} = \mathrm{BE}$ より，四角形 ADBE の対角線 AB と DE は直交する。

よって，$\beta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

原図 正五角形 ABCDE と正三角形 APE を組み合わせると

四角形 ABCP が条件を満たす。