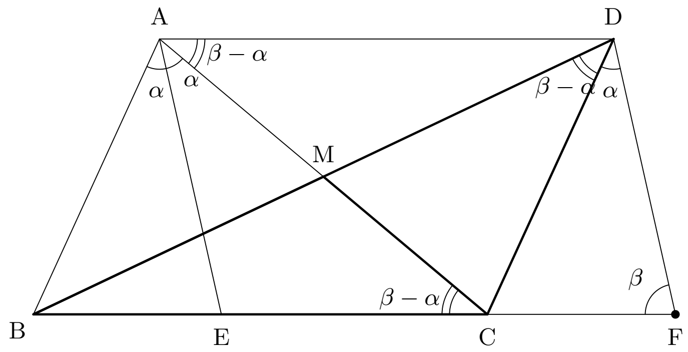
$\boxed{5}$ 平行四辺形 ABCD において，∠BAC の二等分線と線分 BC との交点を E としたとき，$\mathrm{BE}+\mathrm{BC}=\mathrm{BD}$ が成立するという。このとき，$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}}$ の値を求めよ。ただし，2 点 X, Y に対し，線分 XY の長さを XY で表している。

【解答】




AC と BD の交点を M，辺 BC の C を超える延長線上に $\mathrm{CF}=\mathrm{BE}$ となるように点 F をとると
$\triangle\mathrm{ABC}\equiv\triangle\mathrm{DCF}$ であり，四角形 AEFD は平行四辺形となる。
$\mathrm{BD}=\mathrm{BE}+\mathrm{BC}=\mathrm{BC}+\mathrm{CF}=\mathrm{BF}$ であるから，$\triangle\mathrm{BDF}$ は二等辺三角形である。
よって，$\angle\mathrm{BDF}=\angle\mathrm{BFD}=\angle\mathrm{EAD}$
$\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{EAC}=\angle\mathrm{CDF}=\alpha$，$\angle\mathrm{CFD}=\angle\mathrm{DAE}=\beta$ とおくと

$$\angle\mathrm{BDC}=\angle\mathrm{BDF}-\angle\mathrm{CDF}=\beta-\alpha$$
$$\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{EAD}-\angle\mathrm{CAD}=\beta-\alpha$$

よって $\angle\mathrm{BDC}=\angle\mathrm{ACB}$ より $\triangle\mathrm{BDC}\backsim\triangle\mathrm{BCM}$

$$\mathrm{BD}:\mathrm{BC}=\mathrm{BC}:\mathrm{BM},\ \mathrm{BM}=\frac{1}{2}\mathrm{BD}\ \text{より}\ \mathrm{BD}^2=2\mathrm{BC}^2$$

$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}}>0$ であるから $\boldsymbol{\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}}=\sqrt{2}}$

$\boxed{\text{別解}}$

AC と BD の交点を M とすると $\mathrm{AD}=\mathrm{BC},\ \mathrm{AM}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC},\ \mathrm{BM}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BD}$
$\triangle\mathrm{ABD}$ において中線定理より

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$ であるから
$\boldsymbol{2(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2)=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2}$ が成り立つ。

$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AC}=a$ とおくと $\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$ より $\mathrm{BE}=k,\ \mathrm{EC}=a\,k$ と表せる。
ここで $\mathrm{BC}<\mathrm{AB}+\mathrm{AC}$ であるから $\boldsymbol{0<k<1}$ ……① である。
$\mathrm{BC}=\mathrm{BE}+\mathrm{EC}=k+ak=(a+1)k,\ \mathrm{BD}=\mathrm{BE}+\mathrm{BC}=k+(a+1)k=(a+2)k\ \therefore\ \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}}=\dfrac{a+2}{a+1}$
よって

$$2\left\{1^2+(a+1)^2k^2\right\}=a^2+(a+2)^2k^2$$
$$a^2k^2+2=a^2+2k^2$$
$$(a^2-2)(k^2-1)=0$$

① と $a>0$ から $a=\sqrt{2}$
したがって $\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}}=\dfrac{a+2}{a+1}=\dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+1}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$