2 次関数の最大値・最小値　No.1

例 1　**区間の範囲が変わる最大・最小**

a を正の定数とするとき，関数 $f(x)=x^2-4x+5$ $(0 \leqq x \leqq a)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

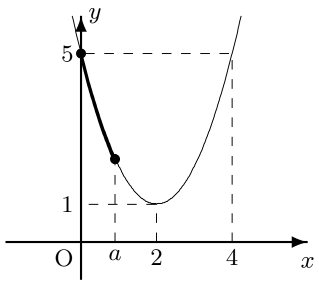
$f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$ より $y=f(x)$ のグラフは，軸 $x=2$，頂点 $(2,\ 1)$，下に凸の放物線である。

【最大値】について　(下に凸であるから，右端と左端の大小で場合分けする)

(☒) $0<a<4$ のとき，グラフは右図。

$f(0)>f(a)$ であるから，$f(x)$ は

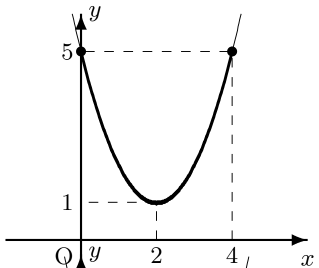
$\boldsymbol{x=0}$ で最大値　$\mathbf{5}$



(☒) $a=4$ のとき，グラフは右図。

$f(0)=f(a)$ であるから，$f(x)$ は

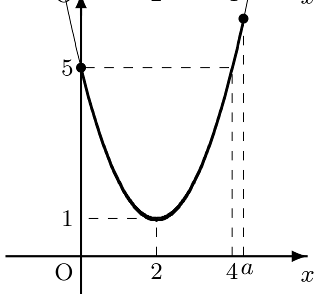
$\boldsymbol{x=0,\ 4}$ で　最大値 $\mathbf{5}$



(☒) $a>4$ のとき，グラフは右図。

$f(0)<f(a)$ であるから，$f(x)$ は

$\boldsymbol{x=a}$ で最大値　$\boldsymbol{a^2-4a+5}$

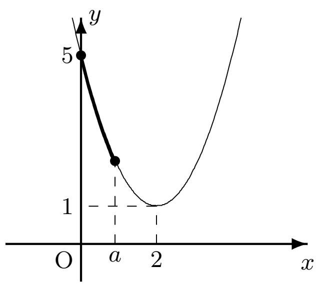


【最小値】について　(区間の中に軸を含むか含まないかで場合分けする)

(☒) $0<a<2$ のとき，軸は区間の右側にあり，グラフは右図。

$f(a)=a^2-4a+5$ であるから，$f(x)$ は

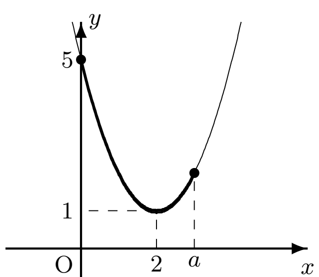
$\boldsymbol{x=a}$ で最小値　$\boldsymbol{a^2-4a+5}$



(☒) $a \geqq 2$ のとき，軸は区間内にあり，グラフは右図。

$f(x)$ は

$\boldsymbol{x=2}$ で　最小値 $\mathbf{1}$



例 2　**文字係数の関数の最大・最小**

2 次関数 $f(x)=x^2-2ax$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ の最大値 $M(a)$ と最小値 $m(a)$ を求めよ。

$f(x)=x(x-2a)=(x-a)^2-a^2$ より $y=f(x)$ のグラフは, 軸 $x=a$, 頂点 $(a,\ -a^2)$, 下に凸の放物線である。

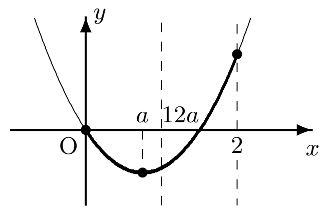
【最大値】について　(下に凸であるから，右端と左端の大小で場合分けする)

区間 $\boldsymbol{0 \leqq x \leqq 2}$ の中央の値 1 と，軸 $\boldsymbol{x=a}$ の位置関係で場合分けする。

(☒) $a<1$ のとき，グラフは右図。

$f(0)<f(2)$ であるから，$f(x)$ は $x=2$ で最大となる。よって

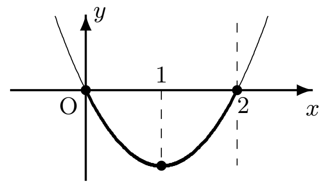
$\boldsymbol{M(a)=f(2)=4-4a}$



(☒) $a=1$ のとき，グラフは右図。

$f(0)=f(2)$ であるから，$f(x)$ は $x=0,\ 2$ で最大となる。よって

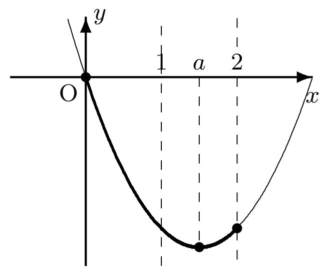
$\boldsymbol{M(a)=f(0)=f(2)=0}$



(☒) $a>1$ のとき，グラフは右図。

$f(0)>f(2)$ であるから，$f(x)$ は $x=0$ で最大となる。よって

$\boldsymbol{M(a)=f(0)=0}$

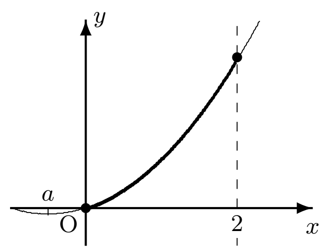


【最小値】について　(区間の中に軸を含むか含まないかで場合分けする)

(☒) $a<0$ のとき，軸は区間の左側にあり，グラフは右図。

$f(x)$ は $x=0$ で最小となる。よって

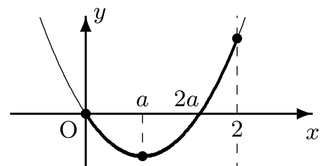
$\boldsymbol{m(a)=f(0)=0}$



(☒) $0 \leqq a<2$ のとき，軸は区間内にあり，グラフは右図。

$f(x)$ は $x=a$ で最小となる。よって

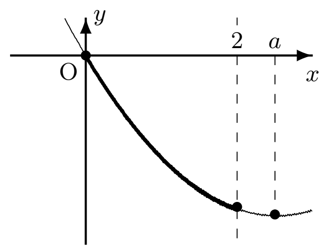
$\boldsymbol{m(a)=f(a)=-a^2}$



(☒) $a \geqq 2$ のとき，軸は区間の右側にあり，グラフは右図。

$f(x)$ は $x=2$ で最小となる。よって

$\boldsymbol{m(a)=f(2)=4-4a}$



2 次関数の最大値・最小値　No.2

例 3　**グラフ固定・区間移動の最大・最小**

区間 $t \leqq x \leqq t+2$ で定義される 2 次関数 $f(x)=x^2-4x+5$ について

(1) 最大値 $M(t)$ を求めよ。

(2) 最小値 $m(t)$ を求めよ。

$f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$ より $y=f(x)$ のグラフは，軸 $x=2$，頂点 $(2,\ 1)$，下に凸の放物線である。

(1) **区間 $t \leqq x \leqq t+2$ の中央の値 $t+1$ と，軸 $x=2$ の位置関係から**

(⊠) $t+1<2$　(⊠) $t+1=2$　(⊠) $t+1>2$ の 3 つの場合に分けて考える。

$\boxed{別}$ $f(t)=t^2-4t+5,\ f(t+2)=(t+2)^2-4(t+2)+5=t^2+1$ であるから

$f(t)=f(t+2)$ とすると，$t=1$ であるから，

(⊠) $t<1$　(⊠) $t=1$　(⊠) $t>1$ の 3 つの場合に分けて考える。

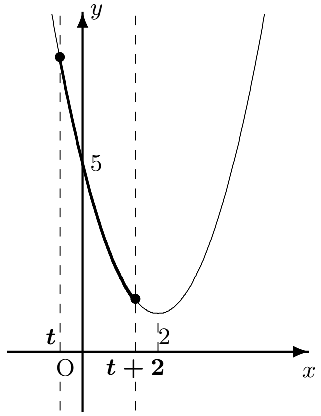
(⊠) $t+1<2$ すなわち $t<1$ のとき，

軸は区間の中央より右側にあり，グラフは右図。

$f(t)>f(t+2)$ であるから，$f(x)$ は

$\boldsymbol{x=t}$ で最大となる。

よって $M(t)=f(t)=\boldsymbol{t^2-4t+5}$



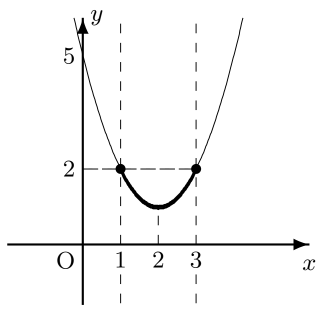
(⊠) $t+1=2$ すなわち $t=1$ のとき，

軸は区間の中央にあり，グラフは右図。

$f(1)=f(3)$ であるから，$f(x)$ は

$\boldsymbol{x=1,\ 3}$ で　最大値となる。

よって $M(t)=f(1)=f(3)=\boldsymbol{2}$



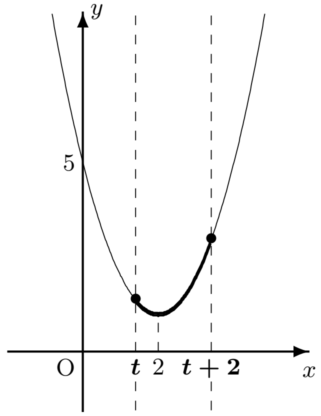
(⊠) $t+1>2$ すなわち $t>1$ のとき，

軸は区間の中央より左にあり，グラフは右図。

$f(t)<f(t+2)$ であるから，$f(x)$ は

$\boldsymbol{x=t+2}$ で最大となる。

よって $M(t)=f(t+2)=(t+2)^2-4(t+2)+5=\boldsymbol{t^2+1}$



(2) **軸 $x=2$ と区間 $t \leqq x \leqq t+2$ の位置関係から**

(⊠) $t+2<2$ (⊠) $t<2\leqq t+2$ (⊠) $t \geqq 2$ の 3 つの場合に分けて考える。

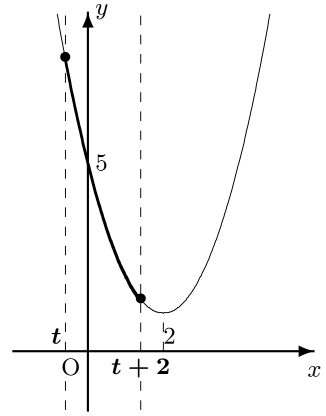
(⊠) $t+2<2$ すなわち $t<0$ のとき，

軸は区間の右外側にあり，グラフは右図。

$f(t)>f(t+2)$ であるから，$f(x)$ は

$\boldsymbol{x=t+2}$ で最小となる。

よって $m(t)=f(t+2)=\boldsymbol{t^2+1}$



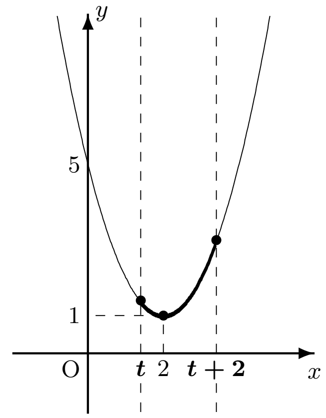
(⊠) $t<2\leqq t+2$ すなわち $0\leqq t<2$ のとき，

軸は区間内にあり，グラフは右図。

よって $f(x)$ は

$\boldsymbol{x=2}$ で　最小となる。

ゆえに $m(t)=f(2)=\boldsymbol{1}$



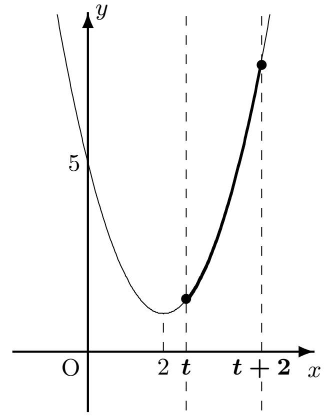
(⊠) $t>2$ のとき，

軸は区間の左外側にあり，グラフは右図。

$f(t)<f(t+2)$ であるから，$f(x)$ は

$\boldsymbol{x=t}$ で最小となる。

よって $m(t)=f(t)=\boldsymbol{t^2-4t+5}$



2 次関数の最大値・最小値　No.3

例 4　**置き換えを必要とする関数の最大・最小**

関数 $f(x)=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)-1$ について

(1) $t=x^2-2x$ とおくとき，t のとる値の範囲を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ を t で表し，最小値とそのときの x の値を求めよ。

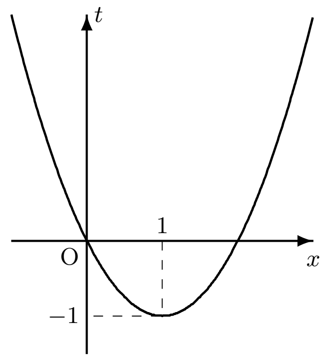
複雑な関数は，置き換えて 2 次関数に変形せよ。

(1)

$t=x^2-2x=(x-1)^2-1$

よって，$x=1$ で，最小値 -1 をとる。

したがって $\boldsymbol{t \geqq -1}$



(2)

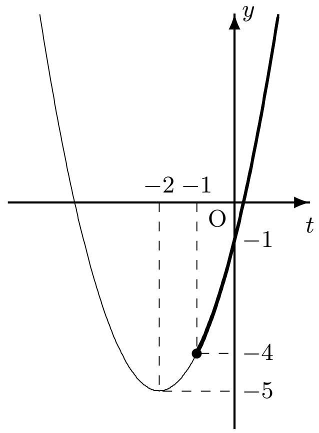
$y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)-1$

$=\boldsymbol{t^2+4t-1}$

$=\boldsymbol{(t+2)^2-5}$

$t \geqq -1$ の範囲で $y=(t+2)^2-5$ のグラフをかくと，右図の太線部分。

よって，$\boldsymbol{t=-1}$ **のとき　最小値 $\boldsymbol{-4}$ をとる。**



このとき，$(x-1)^2-1=-1$

$(x-1)^2=0$

$\therefore\ \boldsymbol{x=1}$

したがって，$f(x)$ は $\boldsymbol{x=1}$ **のとき　最小値 $\boldsymbol{-4}$ をとる。**

練習 区間 $-2 \leqq x \leqq 1$ における 関数 $f(x)=(x^2+2x)^2-4(x^2+2x)-1$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

例 5　**条件つきの 2 変数関数の最大・最小**

(1) $2x+y=4$ のとき，xy の最大値を求めよ。

(2) $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2x+y=5$ のとき，x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ。

2 変数の関数の最大・最小は，条件式で 1 変数にして求めよ。

(1)　$2x+y=4$ より　$y=4-2x$ ……①

$\boldsymbol{z=xy}$ とおいて，① 代入すると

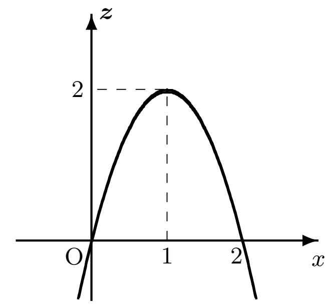
$z=x(4-2x)=-2x^2+4x=-2(x-1)^2+2$

$\boldsymbol{z}$ **は，$\boldsymbol{x=1}$　のとき，最大値 2　をとる。**

$x=1$ を ① に代入すると

$y=4-2\cdot 1=2$

よって，$\boldsymbol{xy}$ **は，$\boldsymbol{x=1,\ y=2}$　のとき，最大値 2**



(2)　$2x+y=5$ より　$y=5-2x$ ……①

条件 $x \geqq 0,\ y=5-2x \geqq 0$ より

$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq \dfrac{5}{2}}$ ……②

$\boldsymbol{z=x^2+y^2}$ とおいて，① を代入すると

$z=x^2+(5-2x)^2=5x^2-20x+25=5(x-2)^2+5$

② の範囲で $y=5(x-2)^2+5$ のグラフをかくと，右図の太線部分。

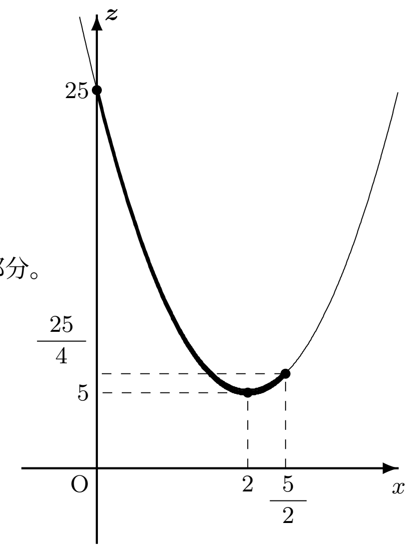
② の範囲で最大値・最小値を求めると，

$\boldsymbol{z}$ **は，$\boldsymbol{x=0}$　のとき，最大値 25 をとり，**

$\boldsymbol{x=2}$　**のとき，最小値 5　をとる。**

① より $x=0$ のとき $y=5$，$x=2$ のとき $y=1$

よって，$\boldsymbol{x^2+y^2}$ **は** $\begin{cases} \boldsymbol{x=0,\ y=5} \text{ のとき，最大値 } \mathbf{25} \\ \boldsymbol{x=2,\ y=1} \text{ のとき，最小値 } \mathbf{5} \end{cases}$



練習 $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2x+y=1$ のとき，x^2+2y^2 の最大値と最小値，そのときの $x,\ y$ の値を求めよ。

2 次関数の最大値・最小値　No.4

例 6　**最大・最小から 2 次関数決定**

(1) 2 次関数 $y=x^2+bx+c$ は，$x=-3$ のとき最小となり，$x=2$ のとき $y=6$ である。このとき，定数 b，c の値を求めよ。

(2) 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは点 $(4,\ -4)$ を通り，$x=2$ のとき最大値 8 をとる。このとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

2 次関数を決定するとき，最大・最小が関係すれば標準形 $y=a(x-p)^2+q$ で考えよ。

(1) グラフは下に凸であるから，頂点で最小となる。

$x=-3$ のとき最小値をとるから

$\boldsymbol{y=(x+3)^2+q}$ とおける。

$x=2$ のとき $y=6$ であるから

$\boldsymbol{6}=(\boldsymbol{2}+3)^2+q$

よって　$\boldsymbol{q=-19}$

したがって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y=(x+3)^2-19}$

すなわち　$\boldsymbol{y=x^2+6x-10}$

$y=x^2+bx+c$ と係数を比較して，$\boldsymbol{b=6,\ c=-10}$

(2) $x=2$ のとき最大値 8 をとるから，グラフは上に凸なので

$\boldsymbol{y=a(x-2)^2+8\ \ (a<0)}$ とおける。

点 $(4,\ -4)$ を通るから，

$\boldsymbol{-4}=a(\boldsymbol{4}-2)^2+8$

よって $-4=4a+8$ から $\boldsymbol{a=-3}$

これは，$a<0$ を満たしているから適する。

したがって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y=-3(x-2)^2+8}$

すなわち　$\boldsymbol{y=-3x^2+12x-4}$

$y=ax^2+bx+c$ と係数を比較して，$\boldsymbol{a=-3,\ b=12,\ c=-4}$

練習 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは点 $(1,\ 6)$ を通り，$x=3$ のとき最小値 -2 をとる。このとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

例 7　**最大・最小から係数の決定**

定義域が $-1\leqq x\leqq 2$ とする関数 $f(x)=ax^2-2ax+b$ の最大値が 5，最小値が 1 のとき，定数 a，b の値を求めよ。

最大・最小による係数の決定は，グラフの凹凸を考えよ。

$a=0$ とすると，$f(x)=b$ となる。これは，最大値 5，最小値 1 をとれないから適さない。

よって $\boldsymbol{a\fallingdotseq 0}$ である。このとき，$\boldsymbol{f(x)=a(x-1)^2-a+b}$

(☒) $a>0$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは，頂点 $(1,\ -a+b)$，軸 $x=1$，

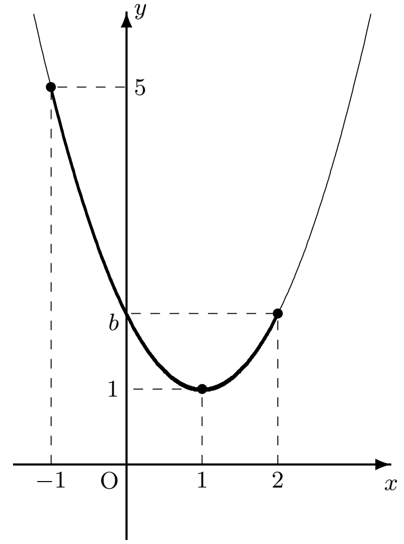
下の凸の放物線で，グラフは右図。

よって，**$\boldsymbol{f(x)}$ は $\boldsymbol{x=-1}$ で最大，$\boldsymbol{x=1}$ で最小となる。**

ゆえに $\begin{cases} f(-1)=3a+b=5 & \cdots\cdots ① \\ f(1)=-a+b=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

これを解いて　$\boldsymbol{a=1,\ b=2}$

この結果は，$a>0$ を満たしているから適する。



(☒) $a<0$ のとき

上に凸の放物線で，グラフは右図。

よって，**$\boldsymbol{f(x)}$ は $\boldsymbol{x=1}$ で最大，$\boldsymbol{x=-1}$ で最小となる。**

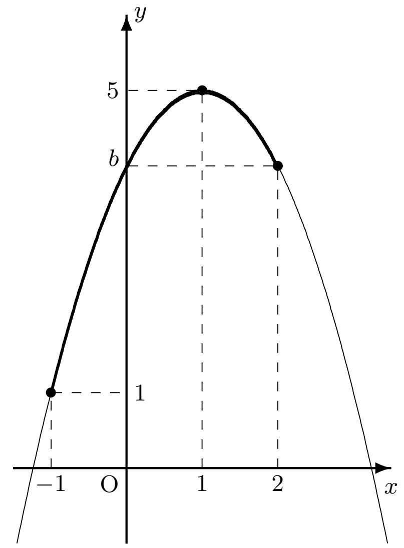
ゆえに $\begin{cases} f(-1)=3a+b=5 & \cdots\cdots ③ \\ f(1)=-a+b=1 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$

これを解いて　$\boldsymbol{a=-1,\ b=4}$

この結果は，$a<0$ を満たしているから適する。

したがて，(☒), (☒) より

$\begin{cases} \boldsymbol{a=1} \\ \boldsymbol{b=2} \end{cases}$　$\begin{cases} \boldsymbol{a=-1} \\ \boldsymbol{b=4} \end{cases}$



練習 定義域が $2\leqq x\leqq 5$ とする関数 $f(x)=ax^2-8ax+b$ の最大値が 6，最小値が -2 のとき，定数 a，b の値を求めよ。