正方形と同じ面積の正三角形の作図・準備

正方形の 1 辺の長さを x，正三角形の 1 辺の長さを y とする。面積が等しいから

$x^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}y^2 \quad \therefore y = \sqrt{\dfrac{4}{\sqrt{3}}}\,x = \dfrac{2}{3}\sqrt{3\sqrt{3}}\,x$ 正方形と同じ面積の正三角形の作図は，無理数 $\sqrt{3\sqrt{3}}$ を作図することである。

直角三角形の辺の長さの関係

(1) $z^2 = xy$，$a^2 = cy$，$b^2 = cx$

$x : y = b^2 : a^2$

【証明】3 つの直角三角形が相似であるから。

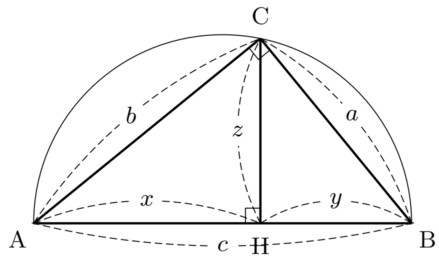
(2) $a^2 + b^2 = c^2$，$ab = cz$

【証明】(1) より $a^2 + b^2 = cy + cx = c(y + x) = c^2$

$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{AC} = \dfrac{1}{2}ab$

$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{CH} = \dfrac{1}{2}cz$

$\therefore ab = cz$

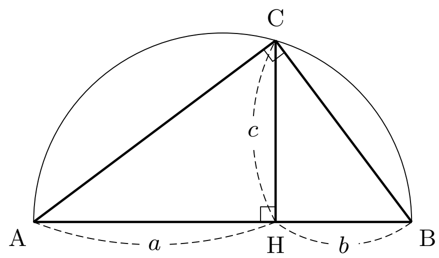


相乗平均 (1)

$\mathrm{AH} = a,\ \mathrm{HB} = b$ となる点を H とする。
線分 AB を直径とする半円を描き，右図のように点 C をとり，$\mathrm{CH} = c$ とする。
$\triangle\mathrm{AHC}$ と $\triangle\mathrm{CHB}$ は相似であるから

$a : c = c : b \quad \therefore ab = c^2$

$a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ であるから $\boldsymbol{c = \sqrt{ab}}$

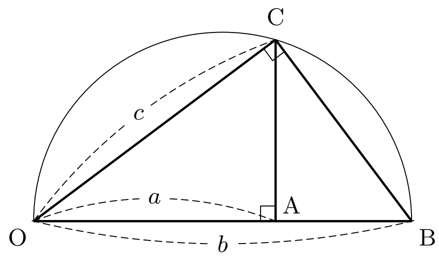


相乗平均 (2)

$\mathrm{OA} = a,\ \mathrm{OB} = b$ とする。
線分 OB を直径とする半円を描き，右図のように点 C をとり，$\mathrm{OC} = c$ とする。
$\triangle\mathrm{COA}$ と $\triangle\mathrm{BOC}$ は相似であるから

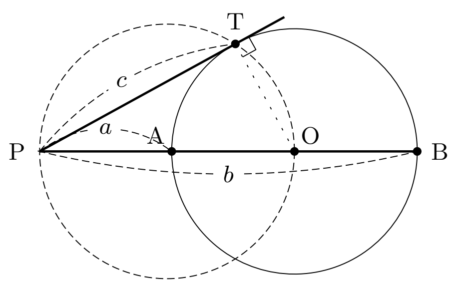
$a : c = c : b \quad \therefore ab = c^2$

$a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ であるから $\boldsymbol{c = \sqrt{ab}}$



相乗平均 (3)

右図のように BA の延長線上に $\mathrm{PA} = a,\ \mathrm{PB} = b$ となる点 P をとる。
線分 AB を直径とする円 O を描き，点 P からこの円へ接線を引き接点を T とする。
「方べきの定理」$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PT}^2$ が成り立つことから，　$ab = c^2$
$a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ であるから $\boldsymbol{c = \sqrt{ab}}$
点 T の作図法は，線分 PO を直径とする円を描き，円 O との交点と T とすると，$\triangle\mathrm{PTO}$ は 線分 PO を直径とする円に内接するから，$\angle\mathrm{PTO} = 90^\circ$ である。



正方形と同じ面積の正三角形の作図

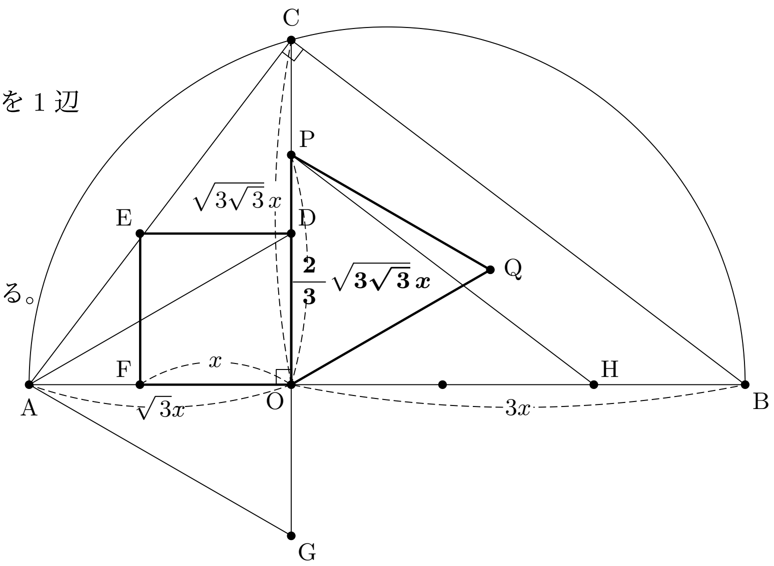
正方形の 1 辺の長さを x，正三角形の 1 辺の長さを y とする。面積はが等しいから

$$x^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}y^2 \quad \therefore y = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}}\,x = \frac{2}{3}\sqrt{3\sqrt{3}}\,x$$

$a = \sqrt{3},\ b = 3$ としたときの相乗平均 $\sqrt{ab}$ を**相乗平均 (1)** の方法で作ってみよう。

【作図の手順】

正方形 ODEF の 1 辺の長さを x とする。



(i) $\sqrt{3}\,x$ の作成

点 O に関して点 D と対称な点 G をとり，DG を 1 辺とする正三角形 DGA を作ると，

$\mathbf{OA} = \sqrt{3}\,x$ となる。

(ii) $\sqrt{3\sqrt{3}}\,x$ の作成

FO の延長線上に OB = 3OF となる点 B をとる。

線分 AB を直径とする半円を描く。

点 O を通り線分 AB に垂直な直線と半円との交点を C とすると，

$\mathrm{OA} = \sqrt{3}\,x,\ \mathrm{OB} = 3x$ より

$\mathbf{OC} = \sqrt{3\sqrt{3}}\,x$ となる。

(iii) $\frac{2}{3}\sqrt{3\sqrt{3}}\,x$ の作成

線分 OB を 2 : 1 に内分する点を H とし，

点 H を通り線分 BC と平行な直線と線分 OC との交点を P とすると，

$\mathbf{OP} = \frac{2}{3}\,\mathbf{OC} = \frac{2}{3}\sqrt{3\sqrt{3}}\,x$ となる。

(iv) 正三角形の作成

OP を 1 辺とする正三角形 OPQ を作る。

これが求める正三角形である。

正三角形と同じ面積の正方形の作図

今度は，正三角形の 1 辺の長さを $2x$ ，正方形の 1 辺の長さを y とする。面積はが等しいから

$\sqrt{3}\,x^2 = y^2 \quad \therefore y = \sqrt{\sqrt{3}}\,x$

$a=\sqrt{3},\ b=1$ としたときの相乗平均 $\sqrt{ab}$ を
相乗平均 (1) の方法で作ってみよう。

【作図の手順】

正三角形 ABC の 1 辺の長さを $2x$ とする。

(i) $\sqrt{3}\,x$ の作成

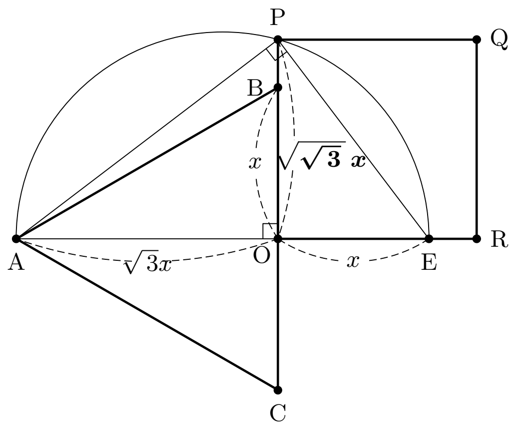
辺 BC の中点を O とすると，$\mathrm{OB}=x$ より，

$\boldsymbol{\mathrm{OA}=\sqrt{3}\,x}$ となる。

(ii) $\sqrt{\sqrt{3}}\,x$ の作成

AO の延長線上に $\mathrm{OE}=\mathrm{OB}$ となる点 E をとる。
線分 AE を直径とする半円を描く。
点 O を通り線分 AE に垂直な直線と
半円との交点を P とすると，
$\mathrm{OA}=\sqrt{3}\,x,\ \mathrm{OE}=x$ より

$\boldsymbol{\mathrm{OP}=\sqrt{\sqrt{3}}\,x}$ となる。



(iii) 正方形の作成

OP を 1 辺とする正方形 OPQR を作る。
これが求める正方形である。

$a=\sqrt{3},\ b=1$ としたときの相乗平均 $\sqrt{ab}$ を
相乗平均 (3) の方法で作ってみよう。

【作図の手順】

正三角形 PCD の 1 辺の長さを $2x$ とする。
辺 CD の中点を B とすると，$\mathrm{PB}=\sqrt{3}\,x$
PB 上に $\mathrm{PA}=x$ となる点 A をとると，

$\boldsymbol{\mathrm{PT}=\sqrt{\sqrt{3}}\,x}$ となる。

PT を 1 辺とする正方形 PTQR を作る。
これが求める正方形である。