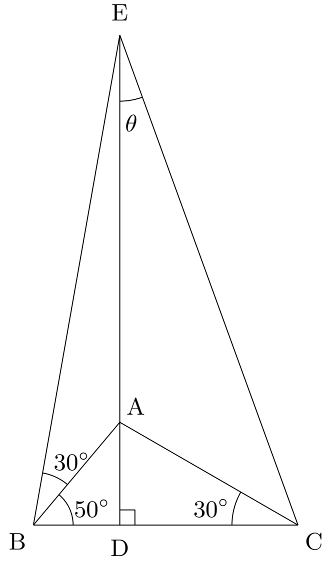
【角度の問題】問題 11

$\boxed{問}$ $\triangle$ABC の高さ AD の延長上に図のように点 E をとります。
図の θ の角度を求めよ。



【求め方 1】

線分 BC に関して点 A と対称な点を F とすると $\triangle$ACF は正三角形。
点 E を通り，線分 CF に平行な直線と直線 FB の交点を G とする。

$\angle CFB = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ$ より　　$\angle EGB = 80^\circ$

$\angle FEG = 60^\circ$ より　　$\angle BEG = 60^\circ - 10^\circ = 50^\circ$

$\angle EBG = 180^\circ - (80^\circ + 50^\circ) = 50^\circ$ より

　　$\mathbf{GE = GB}$

線分 ED 上に EG = EP となる点 **P** をとると

$\triangle$EGP は正三角形で　　$\angle BGP = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$

GP = GB より $\angle GBP = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 20^\circ) = 80^\circ$

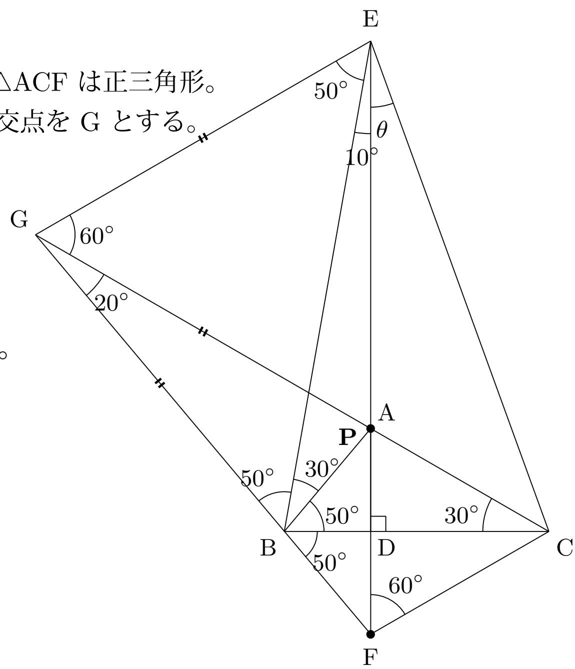
$\angle ABG = 180^\circ - 2 \times 50^\circ = 80^\circ$

よって 点 P と点 A は一致する。

$\triangle$ACF と $\triangle$AEG がともに正三角形より

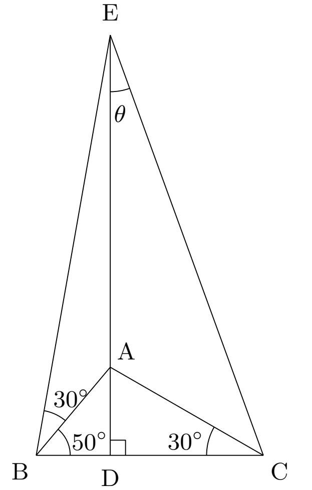
四角形 CFGE は等脚台形である。

よって $\angle CED = \angle CEF = \angle CGF = \mathbf{20^\circ}$ 。



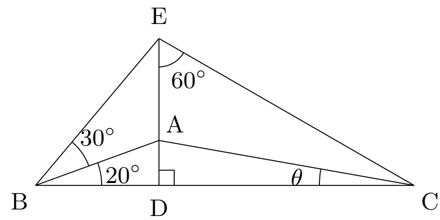
【角度の問題】問題 11

問 $\triangle$ABC の高さ AD の延長上に図のように点 E をとります。
図の θ の角度を求めよ。

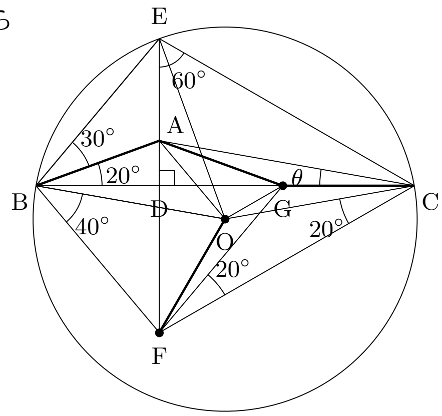


【角度の問題】問題 13′

【求め方 2】角度の問題 13 を参考にする。
問 $\triangle$ABC の高さ AD の延長上に図のように点 E をとります。図の θ は $\theta = 10^\circ$ であることを示すと，問題 11 の図で，直線 AD の延長線上で点 A と反対側に $\angle\mathrm{DBP} = 20^\circ$ となる点 P をとると $\angle\mathrm{BCP} = \angle\mathrm{BEP} = 10^\circ$ が成り立つから，四角形 EBPC は円に内接し $\angle\mathrm{CEP} = \angle\mathrm{CBP} = 20^\circ$ が示せる。



$\triangle$BCE の外心を O とすると，$\overset{\frown}{\mathrm{BE}}$ の円周角と中心角の関係から
$\angle\mathrm{BOE} = 2\angle\mathrm{BCE} = 60^\circ$ であるから $\triangle$BOE は正三角形である。
よって $\mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{OE} = \mathrm{BE}$
$\angle\mathrm{OBC} = 60^\circ - 50^\circ = 10^\circ$
線分 BC に関して点 E と対称な点を F とすると
$\mathrm{BF} = \mathrm{BE} = \mathrm{BO}$
$\angle\mathrm{FBA} = \angle\mathrm{FAB} = 70^\circ$ より　$\mathrm{FB} = \mathrm{FA}$
$\angle\mathrm{OBF} = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ$ より $\triangle\mathrm{BOF} \equiv \triangle\mathrm{FAB}$ であるから
$\mathrm{OF} = \mathrm{AB}$



線分 AD に関して点 B と対称な点を G とすると
$\triangle$GFC と $\triangle$GFC は $\mathrm{GF} = \mathrm{BF} = \mathrm{BO} = \mathrm{OC}$ で
$\angle\mathrm{GFC} = \angle\mathrm{CFD} - \angle\mathrm{GFD} = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ$
$\angle\mathrm{OCF} = \angle\mathrm{DCF} - \angle\mathrm{DCO} = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$
$\mathrm{FC} = \mathrm{CF}$ (共通) であるから　$\triangle\mathrm{GFC} \equiv \triangle\mathrm{GFC}$
よって $\mathrm{GC} = \mathrm{OF}$
$\mathrm{GA} = \mathrm{BA} = \mathrm{OF} = \mathrm{GC}$ であるから
$\angle\mathrm{DCA} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{AGB} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{ABD} = \mathbf{10^\circ}$